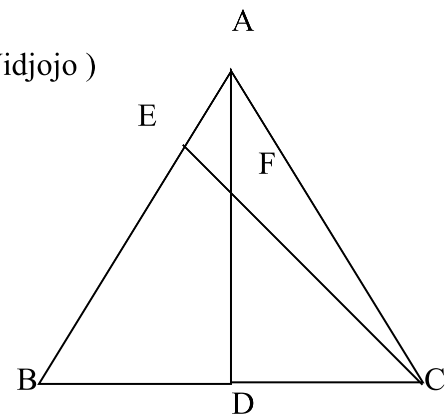
SOAL DAN SOLUSI
OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2007
SURABAYA
OLEH :
RONALD WIDJOJO
SMAK ST. Louis 1 Surabaya

Soal 1. Misalkan ABC segitiga dengan $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$. Misalkan titik D pada sisi BC sehingga AD garis tinggi, titik E pada sisi AB sehingga $\angle ACE = 10^\circ$, dan titik F adalah perpotongan AD dan CE. Buktikan bahwa $CF = BC$.

Solusi : (By Ronald Widjojo)



Perhatikan bahwa segitiga ADC adalah segitiga siku-siku istimewa, maka kita tahu bahwa $CF = 2.DC$.

Sekarang, karena $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$, maka segitiga ABC adalah segitiga sama kaki, dan jelas bahwa garis tinggi AD membagi sisi BC menjadi 2 bagian sama besar.

Maka $BC = 2.BD = 2.CD = CF$

Soal 2. Untuk setiap bilangan asli n , $b(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif n dan $p(n)$ menyatakan hasil penjumlahan semua faktor positif n. Sebagai contoh, $b(14) = 4$ dan $p(14) = 24$. Misalkan k sebuah bilangan asli yang lebih besar dari 1.

(a) Buktikan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $b(n) = k^2 - k + 1$.

(b) Buktikan bahwa ada berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

Official Solution (By Prastudy Mungkas Fauzi)

(a). Untuk sembarang bilangan prima p dan bilangan asli m , pembagi-pembagi dari p^m hanyalah $1, p, p^2, ..., p^{m-1}, p^m$ sehingga $d(p^m) = m + 1$.

Jadi, $d(p^{k^2-k}) = k^2 - k + 1$ untuk setiap bilangan prima p. Karena ada tak hingga banyaknya bilangan prima, maka ada tak hingga banyaknya n sehingga $d(n) = n^2 - n + 1$.

(b). Untuk setiap bilangan bulat positif n ,1 dan n adalah pembagi dari n.

Jadi, $k^2 - k + 1 = s(n) \geq n + 1$

$n \leq k^2 - k$

Jadi hanya ada berhingga banyaknya n yang mungkin

Soal 3. Misalkan a,b,c bilangan-bilangan real positif yang memenuhi ketaksamaan

$5(a^2+b^2+c^2) < 6(ab+bc+ca)$.

Buktikan bahwa ketiga ketaksamaan berikut berlaku: $a+b>c, b+c>a,$ dan $c+a>b$.

Solusi : (By Ronald Widjojo)

WLOG $c > a,b$

Maka $c+a>b$ dan $c+b>a$

Kita cukup membuktikan bahwa $a+b>c$

Persamaan yang diberikan :

$5(a^2+b^2+c^2) < 6(ab+bc+ca)$

ekuivalen dengan

$5ac+5bc-5c^2-a^2-ab+ac-ac-b^2+bc > 4a^2-8ab+4b^2$

$(5c-a-b)(a+b-c) > (2a-2b)^2 \geq 0$

Karena $c > a,b$, maka $5c-a-b>0$

Sehingga kita peroleh $a+b-c>0$

Atau $a+b>c$

Sehingga ketiga pertidaksamaan berlaku, dan kita telah membuktikan apa yang diminta.

Soal 4. Suatu susunan 10-angka $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ dikatakan *cantik* jika

(i) saat dibaca dari kiri ke kanan, $0,1,2,3,4$ membentuk barisan naik, sedangkan $5,6,7,8,9$ membentuk barisan turun, dan

(ii) angka 0 tidak berada pada ujung kiri. Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Tentukan banyaknya susunan cantik.

Solusi : (By Ronald Widjojo)

Perhatikan bahwa angka 0 tak boleh diletakkan di depan, dan yang terdepan haruslah angka 9.

Alasan :

1. Jika yang terdepan merupakan salah satu dari set {1,2,3,4}; maka barisan naik tak akan terbentuk.

2. Jika yang terdepan merupakan salah satu dari set {5,6,7,8}; maka barisan turun juga tak akan terbentuk.

Alternatif 1 :

Maka kita tinggal menghitung cara pemilihan 4 tempat dari 9 tempat yang tersisa untuk menempatkan bilangan dalam set {5,6,7,8} yaitu $C^9_4 = 126$

Alternatif II

Kita menghitung cara pemilihan 5 tempat dari 9 tempat yang tersisa untuk menempatkan bilangan dalam set {0,1,2,3,4} yaitu $C^9_5 = 126$

Catatan : Kita tidak perlu mengalikan permutasi susunannya karena yang diminta adalah susunan naik untuk set {0,1,2,3,4} dan susunan turun untuk set {5,6,7,8,9} yang hanya memiliki 1 cara penyusunan

Soal 5. Misalkan r, s dua bilangan asli dan P sebuah `papan catur' dengan r baris dan s lajur. Misalkan M menyatakan banyak maksimal benteng yang dapat diletakkan pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.

(a) Tentukan M.

(b) Ada berapa cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang?

[Catatan: Dalam permainan catur, benteng adalah buah catur yang bergerak dan menyerang secara horizontal (pada baris) dan vertikal (pada lajur).]

Solusi : (By Ronald Widjojo)

Karena benteng bisa memakan benteng lain yang berada di lajur atau baris yang sama, maka dalam setiap baris atau lajur maksimal ada satu benteng.

(a). $M = \min\{r, s\}$

(b). Bagi 3 kasus :

- Jika $r > s$

Maka untuk lajur pertama ada r cara. Pada lajur kedua ada $(r-1)$ cara, karena di setiap baris hanya boleh ada 1 benteng, sedangkan 1 baris sudah terisi benteng di lajur pertama. Di lajur ketiga ada $(r-2)$ cara,dst. Di lajur ke s ada $(r-s+1)$ cara.

Jadi banyaknya cara adalah $r(r-1)(r-2)...(r-s+1) = \dfrac{r!}{(r-s)!}$

- Jika $s > r$

Maka untuk baris pertama ada s cara. Pada baris kedua ada $(s-1)$ cara, karena di setiap lajur hanya boleh ada 1 benteng, sedangkan 1 lajur sudah terisi benteng di baris pertama. Di lajur ketiga ada $(s-2)$ cara,dst. Di baris ke r ada $(s-r+1)$ cara.

Jadi banyaknya cara adalah $s(s-1)(s-2)...(s-r+1) = \dfrac{s!}{(s-r)!}$

- Jika $r = s$

Maka untuk lajur pertama ada r cara. Pada lajur kedua ada $(r - 1)$ cara, karena di setiap baris hanya boleh ada 1 benteng, sedangkan 1 baris sudah terisi benteng di lajur pertama. Di lajur ketiga ada $(r - 2)$ cara,dst. Di lajur ke s ada $(r - s + 1) = 1$ cara.

Jadi banyaknya cara adalah $r(r - 1)(r - 2)...(r - s + 1) = \dfrac{r!}{(r - s)!} = r! = s!$

Soal 6. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi ketiga persamaan berikut sekaligus

$x = y^3 + y - 8$

$y = z^3 + z - 8$

$z = x^3 + x - 8$

Solusi : (By Ronald Widjojo)

$x = y^3 + y - 8$

$(x - 2) = (y - 2)(y^2 + 2y + 4) + (y - 2)$

$(x - 2) = (y - 2)(y^2 + 2y + 5)$

Analog :

$(y - 2) = (z - 2)(z^2 + 2z + 5)$

$(z - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$

Kalikan ketiga persamaan berakibat :

Kasus 1, misalkan $(x - 2) = 0$, maka menyebabkan

$y = 2, z = 2$

Solusi pertama $(2,2,2)$

Kasus 2 misalkan $(x - 2) \neq 0$, maka menyebabkan

$y, z \neq 2$

Kalikan ketiga ruas..

$(x - 2)(y - 2)(z - 2) = (x - 2)(y - 2)(z - 2)(x^2 + 2x + 5)(y^2 + 2y + 5)(z^2 + 2z + 5)$

Karena $x, y, z \neq 2$, maka kita boleh menyederhanakan kedua ruas

$(x^2 + 2x + 5)(y^2 + 2y + 5)(z^2 + 2z + 5) = 1$

yang tidak mempunyai solusi karena $(x^2 + 2x + 5) = (x + 1)^2 + 4 \geq 4$

Sehingga $(x^2 + 2x + 5)(y^2 + 2y + 5)(z^2 + 2z + 5) \geq 64$

Jadi solusi sistem persamaan ini hanyalah $(2,2,2)$

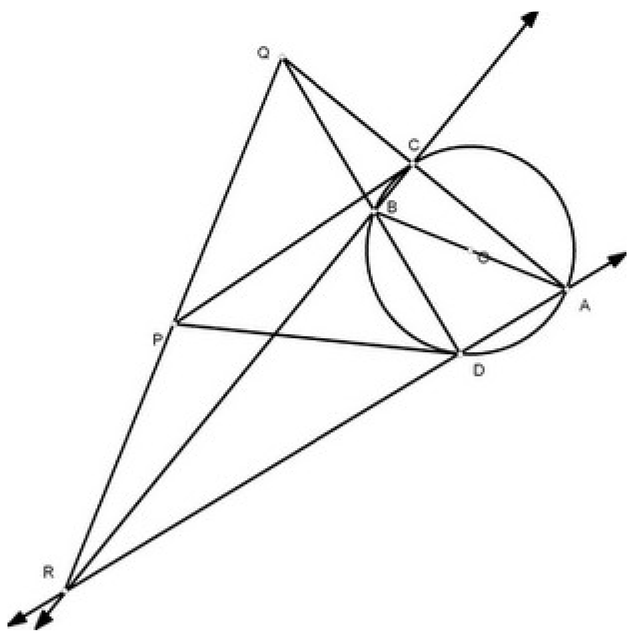
Soal 7. Titik-titik A, B, C, D terletak pada lingkaran *S* demikian rupa, sehingga *AB* merupakan garis tengah *S*, tetapi *CD* bukan garis tengah *S*. Diketahui pula bahwa *C* dan *D* berada pada sisi yang berbeda terhadap *AB*. Garis singgung terhadap *S* di *C* dan *D* berpotongan di titik *P*. Titik-titik *Q* dan *R* berturut-turut adalah perpotongan garis *AC* dengan garis *BD* dan garis *AD* dengan garis *BC*.

(a) Buktikan bahwa *P,Q* dan *R* segaris.

(b) Buktikan bahwa garis *QR* tegak lurus terhadap garis *AB*.

Official Solution (By Dimaz Yuzuf)

(a). Karena *AB* diameter lingkaran, maka $\angle ACB = \angle BDA = \frac{\pi}{2}$, sehingga



$\angle CRA = \angle AQD = \frac{\pi}{2} - \angle DAC$.

Nyatakan *O* sebagai titik pusat *S*, maka kita punya

$\angle CPD = \pi - \angle DOC = \pi - 2\angle DAC = 2\angle CRA = 2\angle CRD$, yang berarti *P* merupakan pusat lingkaran luar segitiga *DRC*. Analog, dapat ditunjukkan bahwa *P* merupakan pusat lingkaran luar segitiga *DQC*.

Jadi kita punya :

$$\begin{aligned}\angle DPR + \angle QPC &= (\pi - 2\angle RDP) + (\pi - 2\angle PCQ) \\ &= 2(\pi - \angle RDP - \angle PCQ) \\ &= 2\left\{\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle PDQ\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \angle RCP\right)\right\} \\ &= 2(\angle PDQ + \angle RCP) \\ &= 2(\angle DAB + \angle BAC) \\ &= 2\angle DAC \\ &= \angle DOC \\ &= \pi - \angle CPD\end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan $\angle DPR + \angle QPC + \angle CPD = \pi$, yang berarti *P,Q,R* segaris.

(b). Berikutnya perhatikan bahwa $CR \perp AQ$ dan $DQ \perp RA$, sehingga kita simpulkan perpotongan dari *CR* dan *DQ*, yaitu titik *B*, merupakan titik tinggi dari segitiga *AQR*. Dari sini dapat kita simpulkan bahwa $AB \perp QR$.

Soal 8. Misalkan m dan n dua bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa $m = n$.

Solusi : (By Raymond Christopher Sitorus)

Assume the contrary

Let $A = k^2 + 2kn + m^2 = (k+n)^2 + (m^2 - n^2)$

- If $m > n$, then

a. $m \geq n + 1$

b. $A > (k+n)^2 \Rightarrow A \geq (k + (n+1))^2 \Rightarrow m^2 - (n+1)^2 \geq 2k \Rightarrow k \leq \dfrac{m^2 - (n+1)^2}{2}$

- If $m < n$, then

a. $m \leq n - 1$

b. $A < (k+n)^2 \Rightarrow A \leq (k + (n+1))^2 \Rightarrow 2k \leq (n-1)^2 - m^2 \Rightarrow k \leq \dfrac{(n-1)^2 - m^2}{2}$

From both cases, *k* is bounded by some nonnegative number, so there exist only a finite number of *k* which is nonnegative.
By our assumption, there exists infinitely many negative possible values for *k*. [1]
If *k* is a solution (so that *A* is a perfect square) then so does $-2n-k$. (Trivial)

Let X be the largest nonnegative value of *k* so that *A* is a perfect square (such value exists, i.e. $k = 0)$.
From [1], we can find a possible negative value of *k* which is less than $-2n-X$, call it *B*, so $-2n-B$ is one possible value for *k*, too. But, $-2n-B > -2n-(-2n-X) = X$ which contradicts the definition of X.

THEREFORE, $m = n$