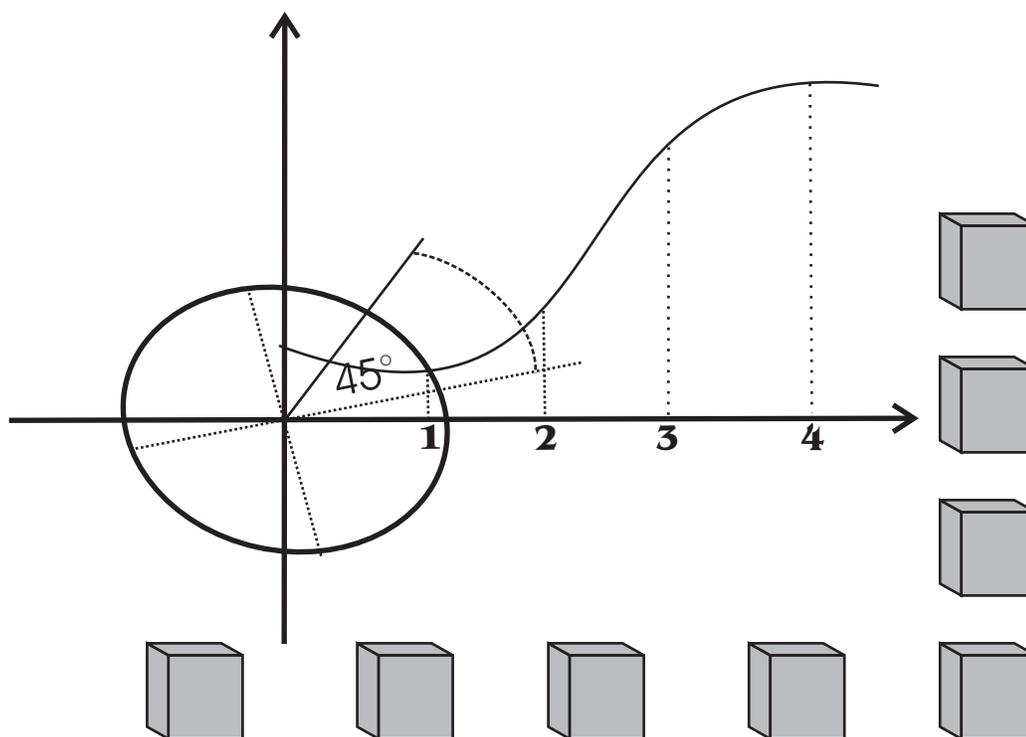


PAKET PEMBINAAN PENATARAN

Drs. M. Danuri, M.Pd.

PEMBELAJARAN IRISAN KERUCUT: LINGKARAN DI SMA



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2004

C11.P/PP/PPP/2004
UNTUK KALANGAN SENDIRI

Nama Kegiatan:

**PENULISAN MODUL
PAKET PEMBINAAN PENATARAN**

Judul Naskah Asli:

Pembelajaran Irisan Kerucut: Lingkaran di SMA

Penulis:

Drs. Muhammad Danuri, M.Pd.

Penilai:

***Drs. Moh. Tari, SU.
Drs. Sukarjono, M.Pd.***

Editor:

Prof. Dr. Sri Wahyuni

Ilustrator:

Andi Wibawa



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU MATEMATIKA
YOGYAKARTA 2004

DAFTAR ISI

PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	ii
BAB I. PENDAHULUAN.....	1
A. Latar Belakang.....	1
B. Tujuan.....	2
C. Sasaran.....	2
D. Cakupan Materi	2
E. Pedoman Penggunaan.....	2
BAB II. IRISAN KERUCUT DI SMA PADA KURIKULUM 2004	3
A. Pembelajaran Lingkaran di SMA	3
B. Posisi Titik dan Garis Terhadap Lingkaran	15
C. Persamaan Garis Singgung yang Melalui Suatu Titik pada Lingkaran	26
BAB III PENUTUP	33
DAFTAR PUSTAKA	34

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Salah satu upaya pemerintah dalam peningkatan mutu pendidikan di Indonesia adalah dengan mengadakan penyempurnaan kurikulum sekolah. Kurikulum 2004 yang akan diberlakukan pada tahun ajaran 2004/2005 baik bagi Sekolah Dasar (SD), Sekolah Menengah Pertama (SMP), maupun Sekolah Menengah Atas (SMA) yang merupakan penyempurnaan dari kurikulum sebelumnya. Untuk melaksanakan kurikulum 2004, masih terdapat banyak kendala di sekolah-sekolah, diantaranya ialah belum siapnya guru untuk melaksanakan kurikulum 2004. Belum semua guru di seluruh Indonesia menerima sosialisasi tentang kurikulum 2004, sehingga untuk pelaksanaan penggunaan kurikulum 2004 di sekolah, baik SD, SMP maupun SMA dilaksanakan secara bertahap.

Untuk sedikit membantu mengatasi permasalahan di atas, PPPG Matematika telah berupaya menerbitkan Paket Pembinaan Penataran (PPP) secara berkala, yang isinya berupa materi pembelajaran, metodologi dan pendekatan pembelajaran serta hal-hal yang berkaitan dengan pembelajaran matematika baik SD, SMP maupun SMA. Paket ini membahas masalah pembelajaran irisan kerucut di SMA dengan mengacu pada kurikulum 2004, yaitu tentang lingkaran. Dipaparkan pada paket ini tentang materi pembelajaran irisan kerucut di SMA diikuti dengan saran dan pembelajarannya yang berorientasi pada Pembelajaran Aktif Kreatif Efisien dan Menyenangkan (PAKEM). Dipaparkan pula contoh-contoh soal dan tugas yang dapat diberikan kepada siswa selama belajar, maupun soal-soal sebagai latihan di rumah.

B. Tujuan

Tujuan penulisan paket ini adalah untuk membantu guru matematika di SMA, para pembaca di dalam menyiapkan pembelajaran matematika khususnya tentang irisan kerucut yang mengacu pada kurikulum 2004, serta untuk menambah wawasan para pembaca untuk menyongsong pemberlakuan kurikulum 2004 di seluruh Indonesia.

C. Sasaran

Paket ini merupakan salah satu sarana pembinaan bagi alumnus pelatihan matematika yang dilaksanakan oleh PPPG Matematika, sekaligus paket ini dapat digunakan untuk para guru matematika SMA di seluruh Indonesia dalam menyongsong pemberlakuan kurikulum 2004.

D. Cakupan Materi

Paket ini berisi tentang materi pembelajaran irisan kerucut di SMA yang mengacu pada kurikulum 2004, yaitu lingkaran dan diikuti saran dan cara pembelajarannya. Selain itu juga diuraikan contoh-contoh soal atau tugas untuk siswa selama belajar, serta tugas-tugas untuk latihan di rumah.

Pada lingkaran diuraikan:

- rumus persamaan lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dan (a, b) .
- menentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya diketahui.
- menentukan persamaan lingkaran dengan kriteria tertentu.
- menentukan posisi titik dan garis terhadap lingkaran.

E. Pedoman Penggunaan

Paket ini disusun sebagai salah satu alternatif untuk membelajarkan siswa materi irisan kerucut yang mengacu pada kurikulum 2004. Bacalah paket ini secara cermat mulai dari cara menanamkan konsep, pemberian contoh-contoh soal, soal-soal yang harus diselesaikan siswa selama belajar dan tugas-tugas yang diberikan untuk latihan di rumah.

Akhirnya apabila dalam memahami paket ini menemui kesulitan, maka Anda dapat mengemukakan permasalahan Anda melalui surat yang dialamatkan: PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YK-BS Yogyakarta 55281.

BAB II

IRISAN KERUCUT DI SMA PADA KURIKULUM 2004

A. Pembelajaran Lingkaran di SMA

Mata Pelajaran	: Matematika
Jenjang Pendidikan	: SMA
Program	: Ilmu Alam
Kelas/Semester	: II/1
Alokasi waktu	: 4 jam pelajaran
Standar kompetensi	: Menyusun dan menggunakan persamaan lingkaran beserta garis singgungnya.
Kompetensi dasar	: 3.1 Merumuskan persamaan lingkaran dan menggunakannya dalam pemecahan masalah. 3.2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

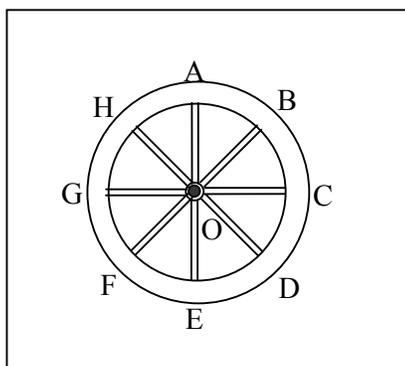
Kegiatan belajar mengajar:

1. Apersepsi

Untuk menuju ke persamaan lingkaran, perlu ditanyakan kepada siswa, benda-benda di sekitar mereka yang mempunyai bentuk lingkaran. Diantaranya para siswa mungkin ada yang menjawab roda kendaraan, kipas angin, piring, beri tempat makanan, capping pak tani, dan lain sebagainya. Kemudian siswa dibimbing untuk mendefinisikan lingkaran.

2. Definisi lingkaran

Kita berharap, siswa dapat mendefinisikan lingkaran, setelah mereka mencari contoh beberapa benda di sekitar mereka yang berbentuk lingkaran. Dengan pertanyaan-pertanyaan:



- bagaimana panjang OA dan OB
- bagaimana panjang OB dan OC
- bagaimana panjang OC dan OD dan seterusnya

Siswa dapat menyimpulkan bahwa:

$$OA = OB = OC = OD = \dots$$

Sehingga diharapkan siswa dapat mendefinisikan lingkaran sebagai berikut:

Gb. 2.1. Roda gerobak

Definisi:

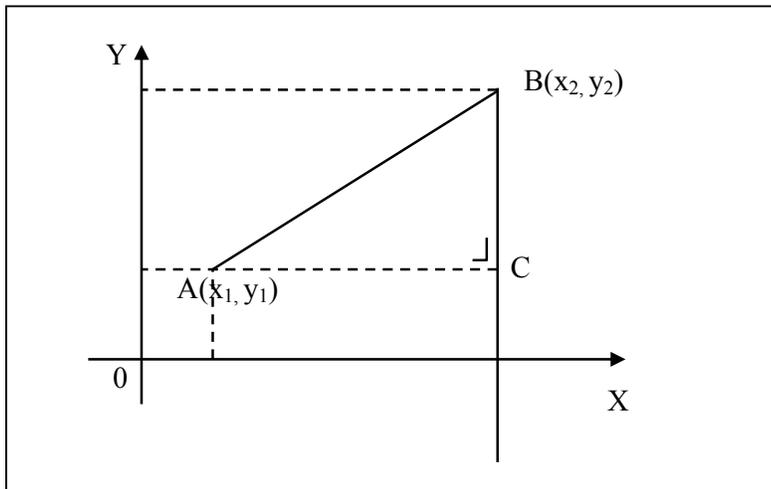
Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya terhadap satu titik tertentu adalah sama (= konstan).

Titik konstan disebut pusat lingkaran dan jarak konstan disebut jari-jari lingkaran.

3. Jarak dua titik

Ingatkan kembali kepada siswa tentang jarak antara dua titik, yaitu jarak antara titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Diharapkan bahwa siswa dapat menjawab jarak antara titik A (x_1, y_1)

dan B (x_2, y_2) adalah $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Jika tidak ada siswa yang ingat tentang jarak dua titik, pancing dengan pertanyaan tentang teorema Pythagoras, yaitu



Gb. 2.2. Segitiga ABC pada sistem koordinat XOY

Dalam ΔABC berlaku

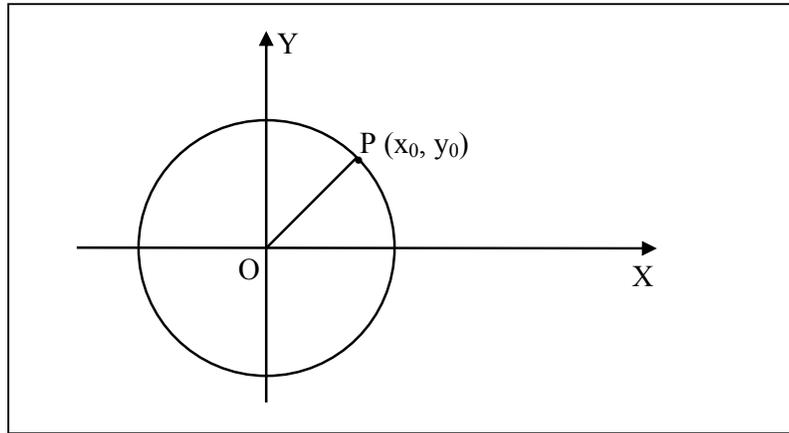
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Kemudian siswa dibimbing untuk dapat menemukan rumus persamaan lingkaran dengan pusat O $(0,0)$ dan jari-jarinya r dengan cara menggunakan definisi lingkaran dan jarak antara dua titik.

4. Persamaan lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dan jari-jari r .



Gb. 2.3. Lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ jari-jari r .

- a. Ingatkan kembali definisi lingkaran, yaitu tempat kedudukan titik-titik yang jaraknya konstan terhadap satu titik tertentu.
Ingatkan rumus jarak dua titik, maka dengan bimbingan guru siswa akan dapat menemukan rumus persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0, 0)$ dan jadinya-jadinya r .
- b. Andaikan titik $P(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran, maka:

$$\overline{OP} = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2 = r^2$$

$$(x^2 + y_0)^2 = r^2$$

Dengan menjalankan titik $P(x_0, y_0)$, maka di dapat:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan jari-jari r adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- c. Guru memberikan contoh soal persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dengan jari-jari berbeda-beda. Misal persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ jari-jarinya:

- 1) 5
- 2) 7
- 3) 10

Siswa diberi pertanyaan secara lisan untuk menjawab persamaan lingkaran apabila diketahui persamaan lingkaran di atas. Harapannya siswa akan menjawab:

- 1) $x^2 + y^2 = 25$
- 2) $x^2 + y^2 = 49$

$$3) x^2 + y^2 = 100$$

- d. Siswa diberi pertanyaan secara lisan untuk mencari panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan lingkarannya, misalnya tentukan jari-jari lingkaran jika persamaannya:

$$1) x^2 + y^2 = 64$$

$$2) x^2 + y^2 = 12$$

$$3) x^2 + y^2 = 32$$

Harapannya siswa akan menjawab:

$$1) r = \sqrt{64} = 8$$

$$2) r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$3) r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

5. Siswa diberi tugas untuk mengerjakan soal-soal sebagai berikut:

Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat $O(0, 0)$ dan jari-jari:

a. $r = 1$

c. $r = 3\sqrt{3}$

e. $r = 13$

b. $r = 6$

d. $r = 0,5$

f. $r = 6\sqrt{2}$

Tentukan panjang jari-jari lingkaran, jika persamaannya adalah:

a. $x^2 + y^2 = 81$

d. $x^2 + y^2 = 54$

b. $x^2 + y^2 = 64$

e. $x^2 + y^2 = 48$

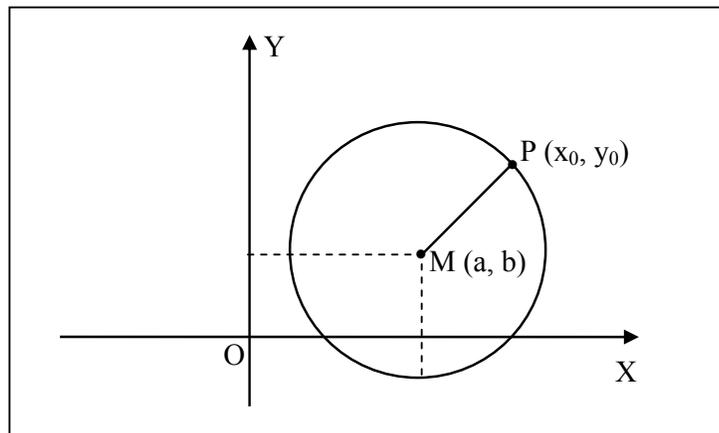
c. $x^2 + y^2 = 45$

f. $x^2 + y^2 = 72$

Lingkaran dengan pusat $M(a, b)$ dan jari-jari r .

6. Untuk mengajak siswa menemukan persamaan lingkaran dengan pusat $M(a, b)$ dan jari-jari r dapat ditempuh dengan dua cara, yaitu.

- a. Dengan cara langsung



Gb. 2.4. Lingkaran dengan pusat M (a, b) dan jari-jari r.

Ingatkan lagi kepada siswa definisi lingkaran dan rumus jarak dua titik.

Jarak $\overline{MP} = r =$ jari-jari lingkaran.

Titik M (a, b) adalah pusat lingkaran.

Andaikata P(x₀, y₀) adalah titik yang terletak pada lingkaran, maka dengan menggunakan definisi lingkaran didapat:

$$\overline{MP} = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$$

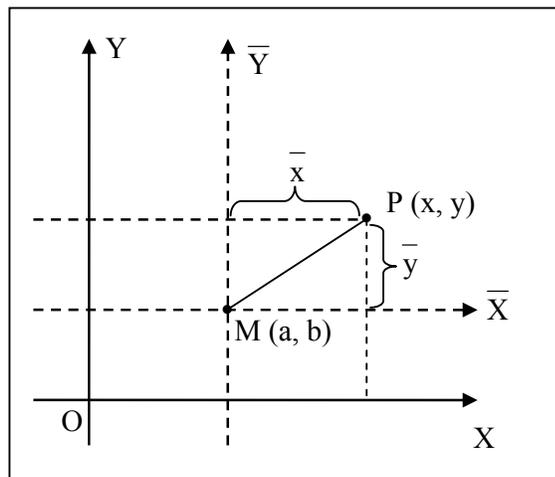
Dengan menjalankan titik P(x₀, y₀), maka didapat:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat M(a,b) dan jari-jari r adalah

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

b. Dengan cara menggunakan rumus Translasi



Dengan tanya jawab, siswa diajak untuk menemukan hubungan antara x dan \bar{x} serta y dan \bar{y} . \bar{x} , \bar{y} sumbu baru sejajar x, y sumbu lama dan melalui (a, b).

Dengan menggeser titik pusat O(0, 0) ke titik M (a, b), maka didapat hubungan bahwa:

$$\bar{x} = x - a$$

$$\bar{y} = y - b$$

Gb. 2.5 Translasi (0, 0) → (a, b)

Terhadap sistim $\bar{X} M \bar{Y}$, maka persamaan lingkaran M (a, b) yang oleh sistim $\bar{X} M \bar{Y}$ dinyatakan dengan (0, 0) dan jari-jari r adalah

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$$

yang jika dinyatakan dalam susunan sistim xoy menjadi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Jadi persamaan lingkaran dengan pusat M (a, b) dan jari-jari r adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

7. Diberikan contoh menentukan persamaan lingkaran dengan pusat M (5, 2) dan jari-jari 4, dengan tanya jawab, diperoleh jawaban siswa sebagai berikut:

Pusat lingkaran M (5, 2) dan jari-jari lingkaran $r = 4$, maka persamaan lingkarannya adalah

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$$

Siswa diberi tugas untuk menentukan persamaan lingkaran jika diketahui koordinat titik pusat dan panjang jari-jarinya.

Tentukan persamaan lingkaran jika

- 1) pusatnya K (5, 1) dan jari-jari 3
- 2) pusatnya L (2, -3) dan jari-jari 5
- 3) pusatnya M (-3, 4) dan jari-jari 6
- 4) pusatnya N (-6, -2) dan jari-jari 1

Soal-soal di atas dapat dikerjakan secara berkelompok atau secara mandiri, diberi waktu kurang lebih 10 menit, kemudian salah seorang siswa maju ke depan untuk menuliskan jawabannya. Siswa yang lain mencocokkan pekerjaan masing-masing, apakah sudah benar atau belum. Apabila ternyata masih ada jawaban siswa yang salah, hendaklah dibetulkan dan guru menandakan lagi apakah siswa bebar-benar telah tahu letak kesalahannya.

8. Dari hasil presentasi, diharapkan jawaban siswa adalah sebagai berikut.

a. Persamaan lingkaran yang pusatnya K (5, 1) dan jari-jari 3 adalah:

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$$

b. Persamaan lingkaran yang pusatnya L (2, -3) dan jari-jari 5 adalah

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

c. Persamaan lingkaran yang pusatnya M (-3, 4) dan jari-jari 6 adalah:

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 6^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$$

d. Persamaan lingkaran yang pusatnya N (-6, -2) dan jari-jari 1 adalah:

$$(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 1^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x + 4y - 39 = 0$$

9. Dilanjutkan dengan mencari pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaannya diketahui.

Siswa diberi contoh misalnya:

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang persamaannya:

a. $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 71 = 0$

b. $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$

Dengan tanya jawab, diperoleh jawaban siswa sebagai berikut: Jawaban yang diharapkan.

Untuk no. 1):

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y - 71 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 5^2 + y^2 - 4y + 2^2 - 5^2 - 2^2 = 71$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 71 + 25 + 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

Jadi pusat lingkaran (5, 2) dan jari-jari lingkaran 10.

Untuk no2)

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 10y + 5^2 + 3^2 - 5^2 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

Jadi pusat lingkaran (3, -5) dan jari-jari lingkaran 7.

10. Siswa diajak untuk menemukan pusat dan jari-jari lingkaran dalam bentuk umum

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dengan cara sebagai berikut:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + Ax + \left(\frac{1}{2}A\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{1}{2}B\right)^2 + C - \left(\frac{1}{2}A\right)^2 - \left(\frac{1}{2}B\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}A\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}B\right)^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C$$

Dari bentuk terakhir ini, dengan cara tanya jawab, siswa diajak untuk menentukan pusat dari jari-jari lingkaran. Diharapkan siswa akan dapat menyebutkan bahwa, jika

persamaan lingkarannya $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ maka pusat lingkaran

$$P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) \text{ dan jari-jari lingkaran } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}.$$

$$R = -\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \text{ tidak diambil, karena jari-jari lingkaran selalu positif.}$$

Siswa diberi tugas untuk menentukan pusat dan jari-jari lingkaran sebagai berikut:

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaan lingkarannya adalah:

a. $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 23 = 0$

b. $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$

c. $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$

d. $x^2 + y^2 - 4x - 60 = 0$

e. $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$

Soal-soal di atas dikerjakan secara kelompok. Tiap kelompok terdiri dari 4 atau 5 siswa, dengan diberi waktu kurang lebih 10 menit. Kemudian salah satu anggota kelompok mempresentasikan jawaban dari hasil diskusi ditulis di papan tulis.

11. Dari hasil presentasi, diharapkan jawaban siswa adalah sebagai berikut

a. Lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 23 = 0$

$$A = -10, B = 8, \text{ dan } C = -23.$$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (5, -4)$$

$$\begin{aligned} \text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(-10)^2 + \frac{1}{4}8^2 - 23} \\ &= \sqrt{25 + 16 + 23} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$

b. Lingkaran $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$

$$A = 8, B = 4, \text{ dan } C = -16$$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (-4, -2)$$

$$\text{Jari-jari lingkaran } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 8^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 16} \\
&= \sqrt{16 + 4 + 16} \\
&= \sqrt{36} \\
&= 6
\end{aligned}$$

c. Lingkaran $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 16 = 0$

$$A = -6, B = -12, \text{ dan } C = 20$$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (3, 6)$$

$$\begin{aligned}
\text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}(-6)^2 + \frac{1}{4}(-12)^2 - 20} \\
&= \sqrt{9 + 36 - 20} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$

d. Lingkaran $x^2 + y^2 - 10y - 24 = 0$

$$A = -4, B = -10 \text{ dan } C = -60$$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (2, 0)$$

$$\begin{aligned}
\text{Jari-jari lingkaran } R &= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(-10)^2 - 60} \\
&= \sqrt{4 + 0 + 60} \\
&= \sqrt{64} \\
&= 8
\end{aligned}$$

e. Lingkaran $x^2 + y^2 - 10x - 24 = 0$

$$A = 0, B = -10 \text{ dan } C = -24.$$

$$\text{Pusat lingkaran } \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (0, 5)$$

$$\text{Jari-jari lingkaran } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4}(-10)^2 + 24} \\
&= \sqrt{0 + 25 + 24} \\
&= \sqrt{49} \\
&= 7
\end{aligned}$$

12. Penutup

Pada kegiatan penutup, siswa dibimbing untuk membuat ringkasan dari materi yang baru diterima, yaitu:

- Persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0, 0)$ dan jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
- Persamaan lingkaran yang pusatnya (a, b) dan jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ dan

$$\text{jari-jari } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}.$$

Soal-soal PR I.

- Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0, 0)$ dengan jari-jari
 - 2
 - 7
 - $2\sqrt{7}$
 - $5\sqrt{2}$
 - $\sqrt{13}$
- Tentukan persamaan lingkaran
 - dengan pusat $(5, 1)$ dan jari-jari 4
 - dengan pusat $(2, -3)$ dan jari-jari 12
 - dengan pusat $(-3, 4)$ dan jari-jari 9
 - dengan pusat $(-1, -5)$ dan jari-jari 3

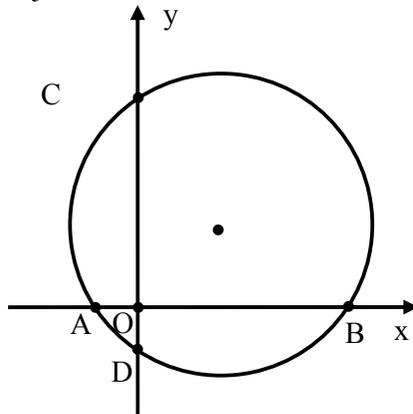
Penjelasan:

Garis singgung pada lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran hanya pada satu titik. Titik tersebut dinamakan titik singgung. Garis singgung tegak lurus jari-jari pada titik singgungnya.

- Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $A(5, -3)$ serta
 - menyinggung sumbu x
 - menyinggung sumbu y .

4. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya di titik $(-4, 0)$ serta
 - a. menyinggung garis $y = x$
 - b. menyinggung garis $y = -x$
 - c. bagaimana hasil Anda dari soal a dan b?
5. Tentukan pusat dan jari-jari dari lingkaran
 - a. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$
 - b. $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 2 = 0$
 - c. $x^2 + y^2 + 6x - 12y - 4 = 0$
 - d. $x^2 + y^2 + 4x + 16y - 32 = 0$
 - e. $x^2 + y^2 - 10x - 56 = 0$
 - f. $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 25 = 0$
 - g. $x^2 + y^2 + 8y - 33 = 0$
6. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $O(0,0)$, pusatnya pada garis $x + 2y = 5$, dan jari-jarinya 5.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu x dan sumbu y , dimana panjang tali busurnya 20 dan 36, jari-jarinya $5\sqrt{13}$ dan pusat pada kuadran pertama.

Petunjuk :



- Tali busur AB pada sumbu x
- Tali busur CD pada sumbu y

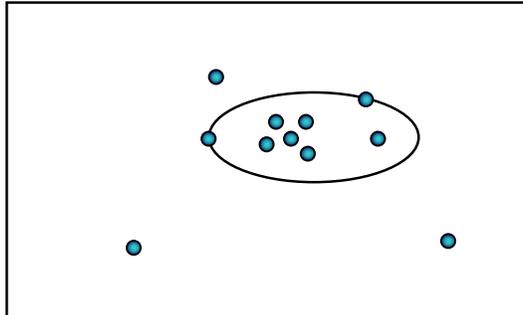
Gb. 2.6

B. Posisi Titik dan Garis Terhadap Lingkaran

Mata Pelajaran	: Matematika
Jenjang Pendidikan	: SMA
Program	: Ilmu Alam
Kelas/Semester	: II/1
Alokasi waktu	: 2 jam pelajaran

- Standar kompetensi : Menyusun dan menggunakan persamaan lingkaran beserta garis singgungnya.
- Kompetensi dasar : 3.1 Merumuskan persamaan lingkaran dan menggunakannya dalam pemecahan masalah.
3.2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

1. Apersepsi



Sebagai apersepsi dapat digunakan contoh anak-anak yang sedang bermain kelereng. Kerja anak dalam bermain kelereng adalah mengeluarkan kelereng di dalam lingkaran dengan menggunakan kelereng juga.

Gb. 2.7

Kelereng yang telah berhasil dikeluarkan dari dalam lingkaran, menjadi miliknya. Dengan cara bergantian mereka mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran itu. Pemenangnya adalah siapa yang terbanyak dapat mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran.

Pada proses mengeluarkan kelereng dari dalam lingkaran, ada kalanya bisa berhasil keluar lingkaran, kadang berhenti pada lingkaran dan kadang perlu tidak bisa berhasil keluar dari lingkaran. Andaikan kelereng tadi dianggap sebagai titik, maka ada 3 kemungkinan posisi titik terhadap lingkaran, yaitu:

- titik berada di luar lingkaran
- titik berada pada lingkaran
- titik berada di dalam lingkaran

2. Untuk menjelaskan posisi titik terhadap lingkaran, disajikan terlebih dahulu persamaan lingkaran dalam bentuk umum, yaitu:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Siswa ditugasi untuk menulis satu persamaan lingkaran. Misalkan siswa menulis persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

Andaikan ada 3 titik, P (7, 5); Q (-1, 2); dan R (0, 4).

3. Siswa ditugasi mensubstitusikan titik P (7,3), Q (-1, 2) dan R (0, 4) pada lingkaran tadi, satu demi satu.

Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

- Substitusi P (7, 5) pada lingkaran, maka didapat :
 $7^2 + 5^2 - 6.7 - 4.5 - 3 = 49 + 25 - 42 - 20 - 3 = 9 > 0$
- Substitusi Q (-1, 2) pada lingkaran, maka didapat :
 $(-1)^2 + 2^2 - 6.(-1) - 4.2 - 3 = 1 + 4 + 6 - 8 - 3 = 0$
- Substitusi R (0, 4) pada lingkaran, maka didapat :
 $0^2 + 4^2 + 6.0 - 4.4 - 3 = 16 - 16 - 3 = -3 < 0$

4. Siswa ditugasi menggambar lingkaran itu serta titik-titik P (7, 5), Q (-1, 2) dan R (0, 4) pada satu susunan salib sumbu. Diharapkan pada siswa akan menggambar lingkaran itu dengan mencari pusat dan panjang jari-jari lingkaran itu dengan mencari pusat dan panjang jari-jari lingkaran terlebih dahulu.

Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$; A = -6, B = -4 dan C = -3.

Pusat lingkaran $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (3, 2)$ dan jari-jari lingkaran $R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(6)^2 + \frac{1}{4}(-4)^2 + 3}$$

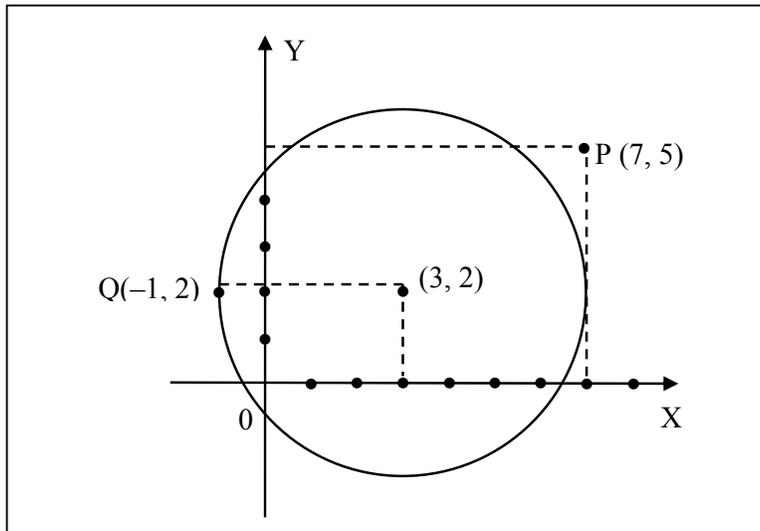
$$= \sqrt{9 + 4 + 3}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$

Jadi pusat (3, 2) dan jari-jari 4.

Siswa menggambar lingkaran dan titik-titik P(7, 3); Q (-1, 2) dan R (0, 4) sebagai berikut:



Gb. 2.8. Lingkaran dengan pusat titik (3, 2), r = 4

Siswa ditugasi mensubstitusikan titik P (7, 5) ke persamaan lingkaran

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2 ; M = (3, 2) \text{ dan } R = 4.$$

Substitusi P (7, 5) :

$$\begin{aligned}(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2 &= \overline{PM}^2 \\ &= 4^2 + 3^2 \\ &= 25 \Leftrightarrow \overline{PM} = 5\end{aligned}$$

Jadi $\overline{PM} = 5 > 4 = R$, maka P di luar lingkaran.

Juga untuk titik Q (-1, 2)

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

Substitusi Q (-1, 2)

$$\begin{aligned}(-1, 3)^2 + (2 - 2)^2 &= \overline{MQ}^2 \\ &= (-4)^2 + 0 \\ &= 16 \Leftrightarrow \overline{QM} = 4\end{aligned}$$

Jadi $\overline{QM} = 4 = R$, maka titik Q pada lingkaran

Juga untuk titik R (0, 4).

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$$

Substitusi R (0, 4)

$$\begin{aligned}(0 - 3)^2 + (4 - 2)^2 &= \overline{MR}^2 \\ &= (-3)^2 + (2)^2 \\ &= 13 \Leftrightarrow \overline{MR} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

Jadi $\overline{RM} = \sqrt{13} < 4 = R$, maka titik R di dalam lingkaran.

Dari gambar dan hasil perhitungan, siswa dibimbing untuk menyimpulkan bahwa:

- P (7, 5) jika disubstitusikan pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ menghasilkan nilai positif, maka titik P (7, 5) berada di luar lingkaran.
- Q (-1, 2) jika disubstitusikan pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ menghasilkan nilai nol, maka titik Q (-1, 2) berada pada lingkaran.
- R (0, 4) jika disubstitusikan pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ menghasilkan nilai negatif, maka titik R (0, 4) berada di dalam lingkaran.

5. Siswa ditugasi untuk menyelidiki titik-titik lain, misalnya titik-titik A (2, 3); B (-2, 2); C (7, 2); D (3, -3) ; E (5, 7) apakah terletak di luar, pada atau di dalam lingkaran. Diberi waktu kurang lebih 10 menit, kemudian salah seorang siswa mempresentasikan hasil kerjanya, siswa yang lain menyimak dan mencocokkan hasil pekerjaannya.

Diharapkan bahwa hasil pekerjaannya adalah sebagai berikut.

Lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$

- A (2, 3) $\rightarrow 2^2 + 3^2 - 6 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 3 = 4 + 9 - 12 - 12 - 3 = -14 < 0$

Jadi titik (2, 3) berada di dalam lingkaran

- B (-2, 2) $\rightarrow (-2)^2 + 2^2 - 6(-2) - 4(2) - 3 = 4 + 4 + 12 - 8 - 3 = 9 > 0$

Jadi titik (-2, 2) berada di luar lingkaran.

- C (7, 2) $\rightarrow 3^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) - 3 = 49 + 4 - 42 - 8 - 3 = 0$

Jadi titik (7, 2) berada pada lingkaran

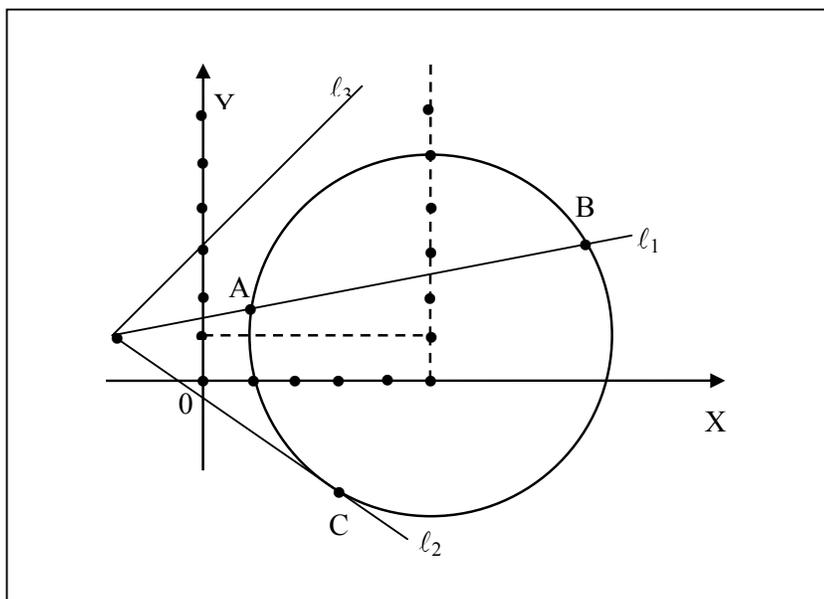
- D (3, -3) $\rightarrow 3^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) - 3 = 9 + 9 - 18 + 12 - 3 = 9 > 0$

Jadi titik (3, -3) berada di luar lingkaran

- E (5, 7) $\rightarrow 5^2 + 7^2 - 6 \cdot 5 - 4 \cdot 7 - 3 = 25 + 49 - 30 - 28 - 3 = 13 > 0$

Jadi titik (5, 7) berada di luar lingkaran . Kemudian pelajaran dilanjutkan dengan penyelidikan posisi garis terhadap lingkaran. Siswa diperintahkan untuk menggambar sembarang lingkaran.

6. Siswa menggambar lingkaran sembarang sebagai berikut:



Gb. 2.9 Kedudukan garis terhadap lingkaran

7. Siswa diperintahkan menentukan sebuah titik sembarang di luar lingkaran, misalnya ia memilih titik P. Melalui titik P siswa diperintahkan untuk menggambar garis l_1 yang memotong lingkaran di dua titik. Yaitu titik A dan titik B, garis l_2 yang memotong lingkaran di satu titik saja, yaitu titik C dan garis l_3 yang tidak memotong lingkaran.
8. Guru menjelaskan kepada siswa posisi garis terhadap lingkaran ada 3 macam, yaitu

- a. garis memotong lingkaran pada dua titik berbeda.
 - b. garis memotong lingkaran pada satu titik saja, dan ini disebut garis menyinggung lingkaran
 - c. garis tidak memotong lingkaran.
9. Guru menugaskan kepada siswa untuk menentukan nilai diskriminan persamaan kuadrat yang didapat dari perpotongan antara garis dan lingkaran berikut, kemudian ditugasi pula untuk menggambar garis beserta lingkarannya.
- a. $13y = -2x + 26$
 $x^2 + y^2 = 25$
 - b. $12y = -5x + 65$
 $x^2 + y^2 = 25$
 - c. $13y = 6x - 78$
 $x^2 + y^2 = 25$

10. Diharapkan siswa mengerjakan sebagai berikut.

$$a. 13y = -2x + 26 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-2x + 26}{13}$$

$$x^2 + \left(\frac{-2x + 26}{13} \right)^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{4x^2 - 104x + 676}{169} \right) = 25$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 + 4x^2 - 104x + 676 = 4225$$

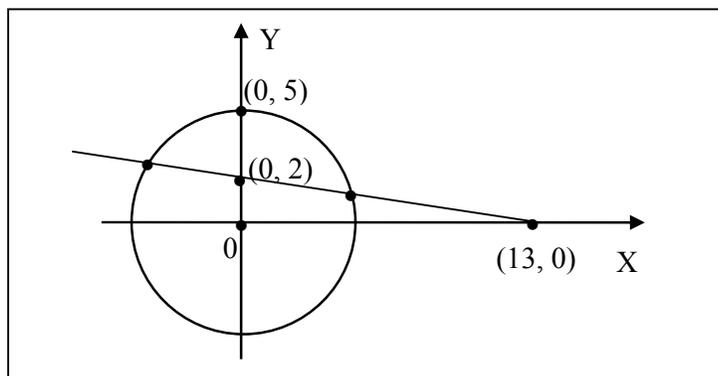
$$\Leftrightarrow 173x^2 - 104x - 3549 = 0, \text{ diskriminan dari persamaan kuadrat ini adalah}$$

$$D = 10816 + 2455908$$

$$= 2466724 > 0$$

Jadi $D > 0$

Dan gambarnya sebagai berikut



Gb. 2.10. Garis memotong lingkaran

$$b. 12y = -5x + 65 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-5x + 65}{12}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{-5x^2 - 65}{12} \right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{25x^2 - 650x + 4225}{144} \right)^2 = 25$$

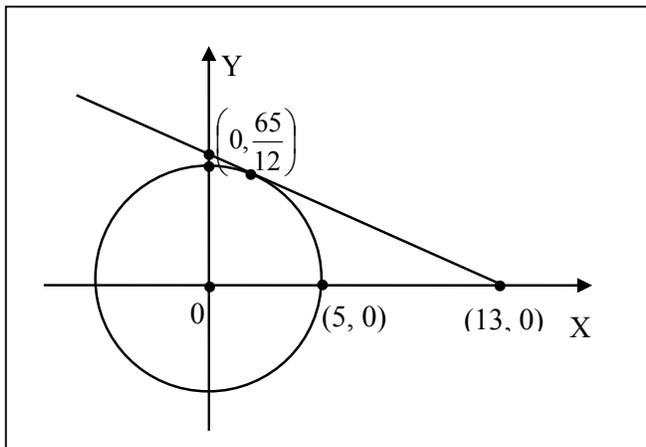
$$\Leftrightarrow 144x^2 + 25x - 650x + 4225 = 3600$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 - 650x + 625 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (-650)^2 - 4 \cdot 169 \cdot 625 = \\ &= 422500 - 422500 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi $D = 0$

Dan gambarnya sebagai berikut



Gb. 2.11 Garis menyinggung lingkaran

$$c. 13y = -6x + 78 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-6x + 78}{13}$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + \left(\frac{-6x + 78}{13} \right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{-36x^2 - 936x + 6084}{169} \right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 169x^2 + 36x^2 - 936x + 6084 = 4225$$

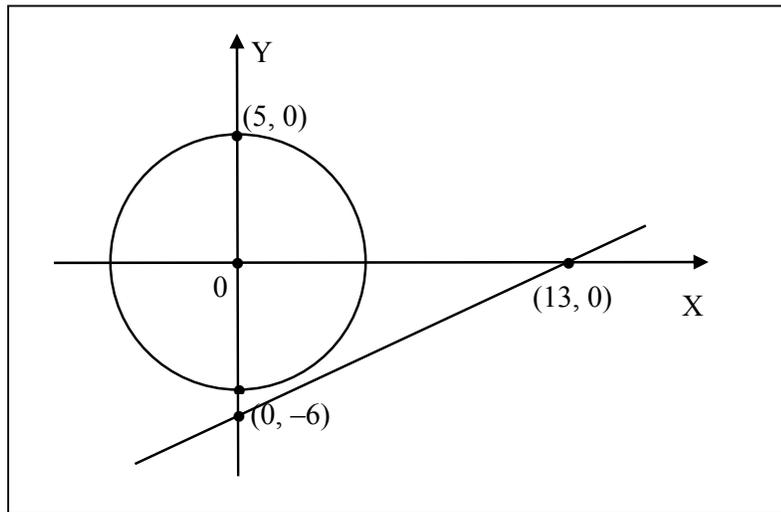
$$\Leftrightarrow 205x^2 - 936x + 1859 = 0$$

$$D = (-936)^2 - 4 \cdot 205 \cdot 1859$$

$$= 876096 - 1524380$$

$$= -648284 < 0$$

Dan gambarnya sebagai berikut:



Gb. 2.12 Garis tidak memotong lingkaran

Dari ketiga gambar di atas siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa:

- garis memotong lingkaran jika $D > 0$
- garis menyinggung lingkaran jika $D = 0$
- garis tidak memotong lingkaran jika $D < 0$

Penutup

Pada kegiatan penutup, siswa diajak menyimpulkan apa yang telah dipelajari, yaitu:

- Persamaan lingkaran dengan pusat O (0,0) jari-jari r adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
- Persamaan lingkaran dengan pusat M (a, b) dan jari-jari r adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, maka pusat $M \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right)$ dan jari-

$$\text{jarinya } R = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

- Lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dan titik $P(x_p, y_p)$.

Jika $x_p^2 + y_p^2 + Ax_p + By_p + C > 0$, maka P diluar lingkaran.

Jika $x_p^2 + y_p^2 + Ax_p + By_p + C = 0$, maka P pada lingkaran.

Jika $x_p^2 + y_p^2 + Ax_p + By_p + C < 0$, maka P di dalam lingkaran

- Lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ } Eliminasi y sehingga menjadi bentuk
 $px^2 + qx + t = 0$ dan $D = q^2 - 4pt$.
 Garis $y = mx + n$

Jika $D > 0$, maka garis memotong lingkaran

Jika $D = 0$, maka garis menyinggung lingkaran

Jika $D < 0$, maka garis tidak memotong lingkaran

- Dapat juga digunakan cara sebagai berikut :

Jika jarak diberikan, jarak dari $M \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right)$ ke garis $mx - y - n = 0$

$$d = \left| \frac{m\left(-\frac{1}{2}A\right) - \left(-\frac{1}{2}B\right) - n}{\sqrt{m^2 + 1}} \right|, R \text{ jari-jari lingkaran.}$$

- $d = R$, menyinggung
- $d > R$, tak memotong dan tak menyinggung (di luar)
- $d < R$, memotong

11. Siswa diberi soal-soal untuk latihan di rumah.

Soal-soal

1. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0, 0)$ dan panjang jari-jari:

- 5
- 3
- $2\sqrt{5}$
- $7\sqrt{2}$

2. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran jika persamaannya:

- $x^2 + y^2 = 18$
- $x^2 + y^2 = 32$

- c. $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$
 d. $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$
 e. $2x^2 + 2y^2 - 15x = 0$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu y di titik asal dan melalui titik $(6, -3)$.
 4. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu x, $r = 2$ dan pusatnya pada garis $2x + y = 4$.
 5. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga ABC, jika A $(3, 2)$; B $(-1, 0)$, C $(0, 3)$. Tentukan pula titik pusat dan jari-jarinya.
 6. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. Selidikilah letak titik-titik berikut ini:
 A $(4, -2)$; B $(7, 3)$; C $(-1, -1)$; D $(0, 6)$; E $(8, -1)$.
 7. Bagaimana posisi:
 - a. garis $y = x - 5$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - bx - 6y = 0$?
 - b. garis $y = x + 5\sqrt{2}$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 25$?
 - c. garis $y = -x - 5$ terhadap lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$?
 8. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik $(2, -1)$, $(4, 5)$ dan $(-3, -2)$.
 9. Tentukan persamaan lingkaran yang memotong sumbu x dan sumbu y positif sepanjang 2 dan 4, dan yang melalui titik asal.
 10. Tentukan persamaan lingkaran melalui titik asal, pusatnya pada garis $x + 2y = 5$ dan jari-jarinya 5.
 11. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga yang sisi-sisinya mempunyai persamaan garis-garis: $x = -2y$, $x = 2$ dan $y = -2$.
 12. Seperti no. 11, jika sisi-sisinya adalah garis-garis: $y = -2x + 5$; $3x - y = -5$ dan $x - 7y = 25$.
 13. Diketahui titik-titik A $(8, 0)$ dan B $(0, 4)$. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tengah-tengah ketiga sisi segitiga ABO.
 14. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu x, $r = 2$ dan pusatnya pada garis $4y = -3x + 16$.
 15. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran yang melalui titik-titik $(0, 5)$; $(12, 0)$ dan titik pusat O.

Kunci soal-soal

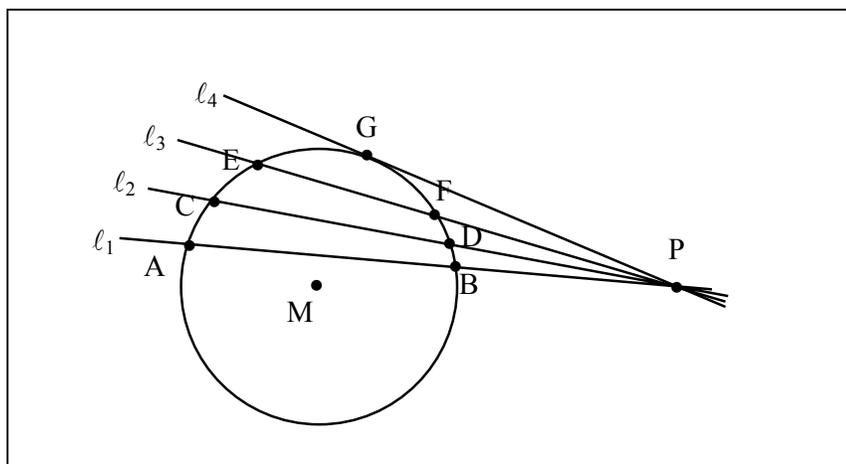
1. a. $x^2 + y^2 = 25$
b. $x^2 + y^2 = 9$
c. $x^2 + y^2 = 20$
d. a. $x^2 + y^2 = 98$
2. a. pusat O (0, 0) dan jari-jari $3\sqrt{2}$
b. pusat O (0, 0) dan jari-jari $4\sqrt{2}$
c. pusat (4, 5) dan jari-jari 10
d. pusat (5, -12) dan jari-jari 13
e. pusat $\left(\frac{15}{4}, 0\right)$ dan jari-jari $\frac{15}{4}$
3. $2x + 2y^2 - 15x = 0$
4. $2x + 2y^2 - 4y + 1 = 0$ atau
 $2x + 2y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
5. $x + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$, pusat (1, 1); $r = \sqrt{5}$
6. Titik A di dalam lingkaran
Titik B di di dalam lingkaran
Titik C di luar lingkaran
Titik D pada lingkaran
Titik E di luar lingkaran
7. a. garis memotong lingkaran
b. garis menyinggung lingkaran
c. garis tidak memotong lingkaran
8. $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 18 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$
10. $x^2 - y^2 - 10x = 0$ atau $x^2 - y^2 - 6x - 8y = 0$
11. $x^2 + y^2 - 6x + 3y + 10 = 0$
12. $x^2 + y^2 = 25$
13. $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$
14. $9x^2 + 9y^2 - 15x + 640 = 0$
15. pusat $\left(6, \frac{5}{2}\right)$ dan jari-jari $\frac{13}{2}$

C. Persamaan Garis Singgung yang Melalui Suatu Titik pada Lingkaran

Mata Pelajaran	: Matematika
Jenjang Pendidikan	: SMA
Program	: Ilmu Alam
Kelas/Semester	: II/1
Alokasi Waktu	: 2 jam pelajaran
Standar Kompetensi	: Menyusun dan menggunakan lingkaran beserta garis singgungnya
Kompetensi Dasar	: 3.2. Menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dalam berbagai situasi.

1. Apersepsi

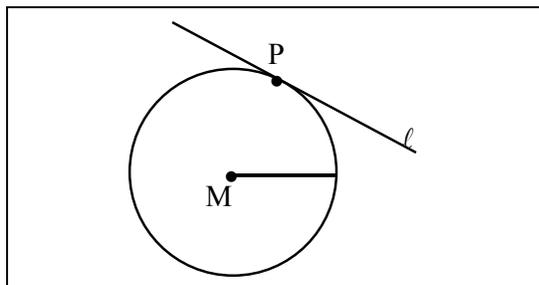
Sebagai apersepsi untuk memahami pengertian garis isnggung pada lingkaran, dapat digunakan ilustrasi sebagai berikut.



Gb. 2.13. Proses garis menyinggung lingkaran.

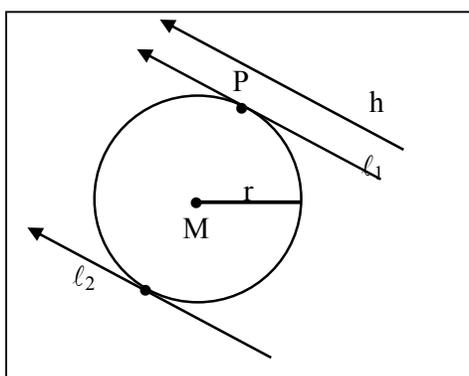
- Siswa disuruh membuat sebuah lingkaran yang pusatnya titik M dan jari-jarinya 3 cm.
- Letakkan sebuah titik di luar leingkaran dengan jarak $MP = 7$ cm.
- Melalui titik P dibuat garis l_1 yang memotong lingkaran pada titik A dan B.
- Putarlah garis l_1 dengan pusat titik P, sehingga didapat garis l_2 yang memotong lingkaran di titik C dan D.
- Putarlah garis l_2 , tetap dengan pusat titik P, sehingga di dapat garis l_3 yang memotong lingkaran di titik E dan F.
- Putarlah garis l_3 , tetap dengan pusat titik P, sehingga di dapat garis l_4 yang memotong lingkaran hanya pada satu titik saja, yaitu titik G.

- g. Maka dikatakan bahwa garis l_4 menyinggung lingkaran di titik G.
2. Jelaskan kepada siswa bahwa dalam pembicaraan garis singgung selanjutnya, ada 3 jenis garis singgung yang dapat dibuat pada sebuah lingkaran, yaitu:
- Garis singgung yang ditarik melalui sebuah titik pada lingkaran. Sehingga sebuah titik pada lingkaran telah diketahui terlebih dahulu.



Gb. 2.14 garis singgung titik P pada lingkaran

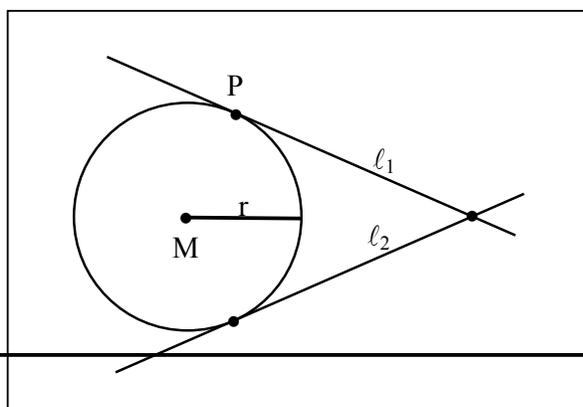
- Garis singgung yang ditarik, harus sejajar atau tegak lurus dengan sebuah garis tertentu. Ini juga dapat dikatakan garis singgung yang mempunyai gradien tertentu.



Diketahui lingkaran (M, r) dan sebuah garis h yang tidak memotong lingkaran. Akan dibuat garis singgung l yang sejajar dengan garis h . Maka terdapat dua garis singgung yang dapat dibuat, yaitu garis singgung l_1 dan l_2 .

Gb. 2.15. Garis singgung yang sejajar garis h

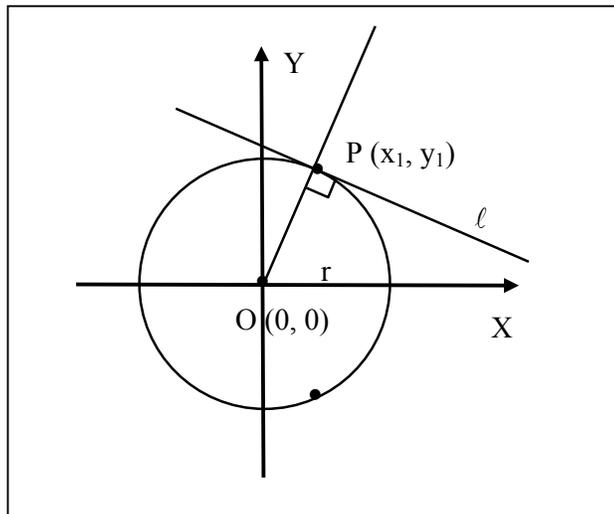
- Garis singgung yang ditarik melalui sebuah titik di luar lingkaran. Sehingga sebuah titik di luar lingkaran telah diketahui terlebih dahulu.



Gb. 2.16 garis singgung melalui titik P di luar lingkaran

Diketahui lingkaran (M, r) dan sebuah titik P terletak di luar lingkaran. Akan dibuat garis singgung ℓ yang melalui titik P, maka akan diperoleh dua garis singgung, yaitu garis singgung ℓ_1 dan ℓ_2 yang kedua-duanya melalui titik P.

3. Jelaskan kepada siswa bahwa yang akan menjadi pembicaraan pada pertemuan ini adalah garis singgung yang melalui titik P pada lingkaran, yaitu jenis 2a.
4. Siswa disuruh menggunakan sebuah lingkaran yang pusatnya pada O $(0, 0)$ dan jari-jarinya r. Letakkan sebuah titik P (x, y) pada lingkaran.



Gb. 2.17. Garis singgung yang melalui titik P pada lingkaran

5. Siswa disuruh menentukan persamaan garis OP, yaitu sebuah garis yang melalui O $(0, 0)$ dengan gradien $\frac{y_1}{x_1}$. Harapan guru, siswa akan menjawab sebagai berikut

$$y - 0 = \frac{y_1}{x_1}(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y_1}{x_1}x$$

Bagaimana kedudukan garis singgung ℓ dengan garis OP? Harapan guru, siswa akan menjawab bahwa garis singgung ℓ tegak lurus dengan garis OP. Kalau demikian, bagaimana hubungan gradien garis ℓ dengan gradien garis OP? Harapan guru, siswa akan menjawab bahwa jika gradien OP dinamakan m_1 dan gradien ℓ dinamakan m_2 , maka karena $OP \perp \ell$ sehingga $m_1 \times m_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \times m_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow m_2 = -\frac{x_1}{y_1}$$

6. Kemudian guru menanyakan kepada siswa, bagaimana persamaan dari garis ℓ , yaitu garis yang mempunyai gradien $-\frac{x_1}{y_1}$ dan melalui titik P (x_1, y_1)?

7. Harapan guru, siswa akan menjawab

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_1 + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$$

Karena (x_1, y_1) pada lingkaran, maka dipenuhi persamaan $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, sehingga persamaan garis ℓ menjadi :

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

Akhirnya siswa menemukan bahwa persamaan garis singgung yang melalui titik P (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah :

$$x_1 x + y_1 y = r^2. \text{ Rumus ini disebut "pembagian adil".}$$

8. Guru memberikan contoh sebagai berikut:

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui:

a. titik (3, 4) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$

b. titik (-5, 12) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$

- c. titik $(-4, a)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$
9. Dengan tanya jawab dengan siswa, guru bersama siswa menyelesaikan soal di atas sebagai berikut:
- Titik $(3, 4)$ di cek terlebih dahulu, apakah benar titik $P(3, 4)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$. Substitusikan titik $(3, 4)$ pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, diperoleh $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Maka benar bahwa titik $(3, 4)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, sehingga persamaan garis singgung yang melalui titik $(3, 4)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah $3x + 4y = 25$.
 - Titik $(-5, 12)$ di cek terlebih dahulu, apakah benar titik $(-5, 12)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$. Substitusikan titik $(-5, 12)$ pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 169$, diperoleh $(-5)^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Maka benar bahwa titik $(-5, 12)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$, sehingga persamaan garis singgung yang melalui titik $(-5, 12)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$ adalah $-5x + 12y = 169$.
 - Titik $(-4, a)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$, maka terpenuhi persamaan $(-4)^2 + a^2 = 25$
 $\Leftrightarrow 16 + a^2 = 25 \quad \Leftrightarrow a^2 = 9 \quad \Leftrightarrow a = \pm 3$.
 Sehingga titik singgungnya $(-4, 3)$ dan $(-4, -3)$.
 Persamaan garis singgungnya pada titik $(-4, 3)$ adalah $-4x + 3y = 25$ dan persamaan garis singgung pada titik $(-4, -3)$ adalah $-4x + 3y = 25$.

10. Siswa diberi soal latihan untuk dikerjakan di kelas sebagai berikut.

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui

- titik $(-6, 8)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$
 - titik $(5, b)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 169$
 - titik $(a, 24)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 625$
11. Salah seorang siswa siswa maju ke depan untuk mempresentasikan hasil kerjanya, siswa yang lain menyimak dan membetulkan hasil kerjanya jika ternyata hasil pekerjaannya belum benar.

Penutup

12. Guru bersama siswa menyimpulkan hal yang baru saja mereka pelajari. Diharapkan siswa dapat menyimpulkan sendiri bahwa:

Persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

13. Siswa diberi soal-soal untuk latihan di rumah.

Soal-soal

Tentukan persamaan garis singgung yang melalui

- titik $(4, -3)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$
- titik $(24, -7)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 625$
- titik $(4, b)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 18$
- titik $(m, 2\sqrt{6})$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 32$
- titik $(4\sqrt{2}, n)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 48$

Kunci soal-soal

- $4x - 3y = 25$
- $24x - 7y = 625$
- $4x + y\sqrt{2} = 18$ dan $4x - y\sqrt{2} = 18$
- $2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{6} = 32$ dan $-2x\sqrt{2} + 2y\sqrt{6} = 32$
- $x\sqrt{2} + y = 12$ dan $x\sqrt{2} - y = 12$

BAB III

PENUTUP

Meskipun bangun lingkaran telah mulai dipelajari oleh siswa sejak kelas 5 Sekolah Dasar, namun lingkaran yang dipandang dari bentuk aljabar atau salah satu bentuk irisan kerucut yang diuraikan secara aljabar analitis baru dikenalkan kepada siswa setelah belajar di SMA. Perlu mendapat penekanan di sini yaitu tentang definisi leingjkraran, hendaklah benar-benar dipahami oleh siswa, serta cara menurunkan persamaan lingkaran baik yang pusatnya pada titik asal atau pada suatu titik $M(a, b)$. Jika hal ini telah benar-benar dimiliki oleh siswa, maka untuk menyelesaikan permasalahan tentang lingkaran akan dapat teratasi.

Untuk menentukan persamaan lingkaran dengan kriteria tertentu, kuncinya adalah pada pemahaman tentang apa yang telah diketahui, dibawa ke bentuk geometrinya (bentuk ilmu ukurnya), kemudian dibawa ke bentuk aljabarnya, maka akan diperoleh persamaannya. Jadi dalam hal ini hendaklah guru dapat membimbing siswanya agar memahami apa yang telah diketahui kemudian membawanya ke bentuk aljabarnya.

Pada persamaan garis singgung, baru sampai pada persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, sedangkan untuk persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) yang terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ atau pada lingkaran dengan bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ akan dibahas nanti pada paket berikutnya. Demikian juga persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) di luar lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ atau lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ juga akan dibahas pada paket berikutnya.

Model pembelajaran contoh A, B dan C pada prinsipnya dapat digunakan sebagai salah satu model pembelajaran yang mengaktifkan siswa. Tidak ada model pembelajaran yang standar, oleh

sebab itu setiap guru diharapkan dapat mengembangkan model-model pembelajaran yang sesuai dengan karakteristik materi ajar dan kondisi lingkungan dimana guru bertugas.

Selamat bertugas, semoga berhasil dalam membimbing dan mencerdaskan siswa saudara.

Amin.

DAFTAR RUJUKAN

Depdiknas, (2003). *Kurikulum 2004. Standar Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah*, Jakarta

Rawuh dkk, 1972, *Ilmu Ukur Analitik Teori dan Soal-soal untuk SMA- B, Kursus B₁ Ilmu Pasti Jilid I*, Bandung, Terate.

Sartono Wirodikromo, 1997, *Matematika untuk SMU Kelas 3 Program IPA Caturwulan I*, Jakarta, Erlangga.

Sriwidodo,, *Ilmu Ukur Analitik untuk SMA*, Surakarta, SMA Negeri I.
