PELUANG

DISAJIKAN PADA
DIKLAT INSTRUKTUR/PENGEMBANG MATEMATIKA SMP
JENJANG DASAR
TANGGAL 10 S.D. 24 OKTOBER 2004
DI PPPG MATEMATIKA

Oleh:
Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed.
Widyaiswara PPPG Matematika

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

BAGIAN I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Peluang merupakan bagian matematika yang membahas tentang ukuran ketidakpastian terjadinya suatu peristiwa yang ada dalam kehidupan (Smith, 1991:3). Memang banyak peristiwa yang tidak dapat dipastikan terjadi atau tidak terjadi di kemudian waktu. Namun dengan mengetahui ukuran berhasil dan tidaknya suatu peristiwa yang diharapkan akan terjadi di kemudian waktu orang lebih dapat mengambil keputusan terbaik dan bijaksana tentang apa yang seharusnya ia lakukan.

Materi peluang secara sederhana mulai dikenalkan di SLTP lebih diperdalam di SMU dan ditingkatkan lagi di perguruan tinggi. Namun dari hasil tes penguasaan guru selama ini (SLTP dan SMU) ternyata untuk peluang masih sangat kurang. Mungkin guru kurang minat mempelajari atau mungkin kesulitan mendapatkan buku-buku rujukan atau mungkin buku-buku rujukan yang dipelajarinya selama ini belum cukup memberikan benang merah yang cukup untuk menghayati materi itu (materi yang seharusnya dikuasai guru) sepenuhnya.

Melalui makalah ini penulis berupaya memberikan tuntunan pemahaman materi peluang minimal yang harus dikuasai guru SLTP atas dasar paradigma pemberian kecakapan hidup (life skill) yang bersifat akademik menggunakan prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together dan learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11). Diharapkan para pembaca (guru matematika SLTP) dalam memahami makalah ini bekerjasama dengan teman-teman seprofesi: saling membaca, mencoba soal, berdiskusi dan mengadakan konfirmasi (menyampaikan argumentasi/alasan pemecahan masalahnya).

B. TUJUAN

Makalah ini ditulis dengan maksud untuk memberikan bahan pemahaman pendalaman materi peluang minimal yang harus dikuasai guru matematika SLTP agar lebih berhasil dalam mengajarkan materi peluang kepada para siswanya. Khusus kepada para alumni penataran guru inti MGMP matematika SLTP (penerima makalah ini) diharapkan untuk menggunakannya sebagai bahan tindak lanjut penataran dengan paradigma baru sesuai anjuran pemerintah saat ini. Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan agar para alumni dapat:

1. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya.
2. mengajarkan kepada para siswanya secara lancar, lebih baik dan lebih jelas.

C. RUANG LINGKUP

Materi peluang yang ditulis pada makalah ini merupakan materi minimal yang harus dikuasai oleh guru SLTP. Materi yang dibahas meliputi:

1. Konsep ruang sampel dari suatu eksperimen (percobaan acak), teknik penulisan, dan teknik perhitungan banyak anggotanya termasuk permutasi dan kombinasi.

2. Konsep peluang, kepastian dan kemustahilan, frekuensi harapan, relasi antar peristiwa, teorema dasar peluang, cara pengambilan sampel dan teknik perhitungannya, serta pengundian sekaligus dan pengundian secara berulang.

D. PEDOMAN PENGGUNAAN

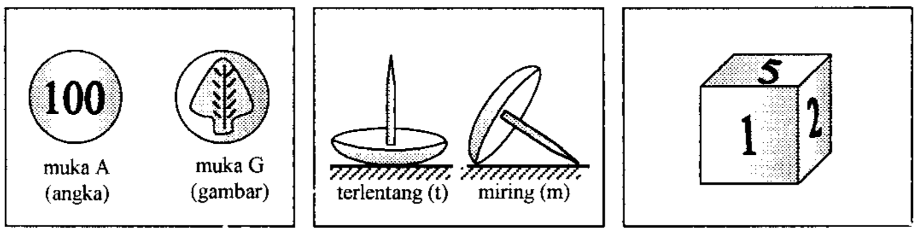
Makalah ini dirancang seperti modul, dapat dibaca dan dipahami sendiri termasuk mengerjakan soal-soal latihan dan merujuknya pada kunci jawaban. Untuk itu langkah-langkah penguasaan materinya adalah

1. Pelajari materinya (bersama teman)
2. Bahas soal-soalnya dan lihat kunci jawabannya.
3. Adakan Problem Posing: Ciptakan variasi soal lainnya berikut jawabannya.

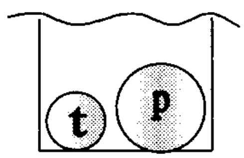
BAGIAN II
PELUANG

A. RUANG SAMPEL DALAM EKSPERIMEN ACAK

Misalkan kita mengadakan eksperimen melambungkan sekeping mata uang, melambungkan sebuah paku payung (pines) dan melambungkan sebuah dadu masing-masing satu kali. Hasil-hasil yang mungkin terjadi adalah: (1) untuk mata uang muka A (angka) atau muka G (gambar), (2) untuk paku pines posisi terlentang atau posisi miring, sedangkan (3) untuk dadu adalah mata 1, 2, 3, 4, 5, atau mata 6 (lihat gambar).



Sekarang misalkan kita melakukan eksperimen berupa pengambilan "acak" dalam tanda petik terhadap sebuah kaleng terbuka berbentuk tabung yang ditutup kain dan berisi sebuah bola pingpong (p) dan sebuah bola tenis (t).



Jika Anda adalah pelaku eksperimen, sementara teman Anda diminta menebak apa yang akan terambil nantinya pada percobaan (eksperimen) yang Anda lakukan itu. Jawabannya tentu akan tergantung apa yang akan Anda lakukan. Mungkin jika teman Anda menebak bola tenis (t), Anda akan mengambil bola yang kecil (p). Sementara jika teman Anda menebak bola yang kecil/bola pingpong (p), Anda akan mengambil bola yang besar/bola tenis (t). Dengan begitu hasil yang akan terjadi tergantung Anda yang akan mengaturnya. Eksperimen semacam ini *tidaklah fair* (tidak adil/jujur) sehingga tidak akan dibahas lebih lanjut.

Suatu eksperimen disebut fair (adil/jujur) apabila pelaku eksperimen tidak dapat mengatur hasil eksperimennya.

Dengan demikian jelas bahwa suatu eksperimen akan fair jika obyek-obyek eksperimennya diperlakukan secara acak (random) sedemikian sehingga sipelaku eksperimen tidak dapat mengatur hasil eksperimennya. Eksperimen-eksperimen yang fair tersebut yang akan dibahas lebih lanjut dalam pokok bahasan peluang.

Suatu hal yang perlu diperhatikan adalah bahwa untuk melakukan suatu eksperimen ada 2 (dua) hal yang harus ada. Kedua hal tersebut adalah (1) obyek eksperimen dan (2) cara melakukan eksperimen terhadap obyek eksperimen itu.

Lebih lanjut apabila obyek eksperimennya ada dan eksperimen yang dilakukannya fair, maka:

1. Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dalam eksperimen
2. Titik sampel adalah setiap hasil yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu
3. Peristiwa/kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel yang diperoleh dalam eksperimen itu
4. Peristiwa elementer adalah peristiwa yang hanya memuat tepat satu titik sampel.

Contoh 1

Tentukan ruang sampel pada pengundian (tossing) satu kali tehadap:

a. sekeping mata uang logam
b. sebuah paku payung (pines)
c. sebuah dadu

Jawab

a. Jika pada mata uang itu A = munculnya muka angka dan G = munculnya muka gambar, maka ruang sampel yang dihasilkan adalah S = {A, G}.
b. Jika pada pines t = keadaan pines terlentang, m = keadaan pines miring dan b = keadaan pines berdiri, maka S = {t, m}. Hasil b yaitu keadaan pines berdiri tidaklah mungkin terjadi, yang mungkin terjadi adalah hasil terlentang (t) dan miring (m). Sehingga S = {t, m} sedangkan $b \notin S$.
c. Dadu mempunyai 6 permukaan. Jika permukaan pertama hingga ke-6 itu masing-masing kita tandai dengan 1, 2, 3, 4, 5, 6 maka himpunan semua hasil yang mungkin pada eksperimen itu adalah S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

B. KONSEP PELUANG

Dalam matematika, pengertian peluang secara lengkap didasarkan atas definisi empirik, definisi klasik, dan tinjauan secara aksiomatis. Ketiga macam dasar tinjauan tersebut dimaksudkan untuk saling melengkapi satu sama lain.

1. Berdasarkan Definisi Empirik

Definisi Empirik

Peluang munculnya suatu peristiwa dalam suatu eksperimen (percobaan) adalah nilai frekuensi relatif munculnya peristiwa itu jika banyaknya percobaan tak terhingga.

Sebagai gambaran menentukan nilai peluang yang dimaksud, berikut adalah contoh tabel hasil percobaan terhadap sekeping mata uang logam yang dilakukan secara acak hingga 20.000 kali.

Banyaknya Percobaan (n)	Frekuensi munculnya muka A (m)	Frekuensi Relatif F_r (Angka) = $\frac{m}{n}$
10	8	0,8000
100	62	0,6200
1.000	473	0,4730
5.000	2550	0,5100
10.000	5098	0,5098
15.000	7619	0,5079
20.000	10.038	0,5019

(Sumber: Anton, Applied Finite Mathematics, New York: Anton Texbook Inc, 1982)

Berdasarkan pengamatan dari tabel tersebut tampak bahwa semakin besar banyak percobaannya nilai frekuensi relatifnya cenderung semakin mendekati nilai 0,5000 atau 0,5 atau $\frac{1}{2}$. Secara formal dikatakan bahwa peluang munculnya muka angka (A) adalah $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} F_r = \frac{1}{2}$.

Selanjutnya karena ruang sampel dari eksperimen itu hanyalah muka angka (A) dan muka gambar (G), maka frekuensi relatif untuk muka gambar adalah

$F_r(B) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$. Dengan demikian maka peluang munculnya muka gambar (G) adalah $P(B) = \lim\limits_{n\to\infty} F_r(G) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{m}{n})$

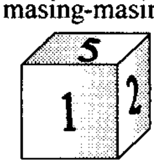
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Karena ruang sampel dari eksperimen terhadap sebuah mata uang adalah

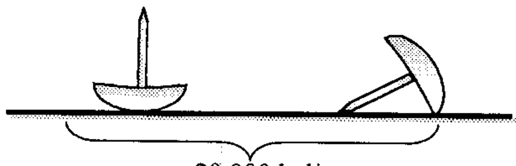
$S = \{A, G\}$ maka $P(S) = P(A) + P(G) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Apabila disimak lebih lanjut, nilai peluang untuk $S = \{A, G\}$ pada eksperimen terhadap mata uang menghasilkan $P(S) = 1$ yang terbagi sama rata pada nilai peluang dari kedua titik sampelnya, yakni $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(G) = \frac{1}{2}$. Itu berarti masing-masing titik sampelnya berpeluang sama untuk muncul. Obyek eksperimen lainnya seperti dadu apabila diundi dengan cara melambungkan ke udara dan menjatuhkannya di lantai maka ruang sampel yang dihasilkan adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Peluang munculnya S pada dadu juga berlaku $P(S) = 1$. Masing-masing titik sampel pada mata dadu dapat dianggap berpeluang sama untuk muncul sebab dadu secara matematis (setelah diadakan abstraksi dan idealisasi) masing-masing titik sampelnya (berupa muka dadu) dapat dianggap sebagai benda yang simetris dan setimbang sempurna. Dengan begitu untuk dadu masing-masing permukaannya mempunyai nilai peluang $\frac{1}{6}$.



$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Ada suatu obyek eksperimen yang masing-masing titik sampelnya tidak setimbang. Artinya peluang munculnya masing-masing titik sampel tidak sama. Obyek eksperimen itu adalah pines (paku payung). Perhatikan bahwa pines (paku payung) yang bila dilambungkan di atas lantai kemungkinan hasil jatuhnya hanya terlentang (t) atau miring (m) tidak dapat dianggap setimbang sebab hasil percobaan yang dilakukan penulis hingga 20.000 kali memberikan hasil seperti berikut.



20.000 kali

$F_r(\text{miring}) = 0{,}3107$

Maka $P(\text{miring}) = \lim_{n\to\infty} F_r(\text{miring}) = 0{,}31$.

Tabel Hasil Percobaan.

Banyaknya Percobaan (n)	Frekuensi munculnya hasil miring (m)	Frekuensi Relatif $F_r\,(\text{miring}) = \frac{m}{n}$
1000 kali	314	0,3140
5.000 kali	1577	0,3154
10.000 kali	3157	0,3157
15.000 kali	4682	0,3121
20.000 kali	6214	0,3107

Dari kecenderungan hasil yang ditunjukkan kita dapat menganggap bahwa $\lim_{n\to\infty} F_r(\text{miring}) = 0{,}31$. Dengan demikian maka untuk pengundian terhadap paku payung (pines) disimpulkan bahwa

$$\boxed{\begin{array}{c} P(\text{miring}) = 0{,}31 \text{ dan } P(\text{terlentang}) = 0{,}69 \\ \text{atau} \\ P(\text{miring}) = 0{,}3 \text{ dan } P(\text{terlentang}) = 0{,}7 \end{array}}$$

Secara umum untuk semua ruang sampel dari suatu eksperimen, yaitu apabila $S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_k\}$ maka berlaku
$P(S) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + P(\{e_3\}) + \ldots P(\{e_k\}) = 1$.
Artinya P(S) merupakan jumlah dari peluang masing-masing titik sampelnya.
Alasannya:

$$P(S) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

2. ***Berdasarkan Definisi Klasik***

Definisi Klasik

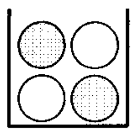
Jika semua titik sampel dalam ruang sampel S berpeluang sama untuk muncul, maka peluang munculnya peristiwa A dalam ruang sampel S adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}\ ;\ n(S) \neq 0.$$

n(A) = banyaknya elemen (titik sampel) dalam A

$n(S)$ = banyaknya elemen (titik sampel) dalam S

Contoh 1



Misalkan dalam sebuah kotak terdapat 4 bola terdiri dari 2 bola berwarna merah dan 2 bola lainnya berwarna putih.

Eksperimen yang dilakukan adalah

a) mengambil secara acak sebuah bola. Tentukan peluang bahwa bola yang terambil berwarna merah.
b) mengambil secara acak 2 bola sekaligus. Tentukan peluang bola yang terambil keduanya berwarna merah.

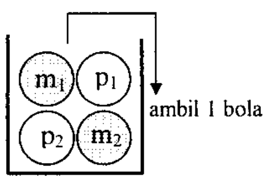
Jawab.

Karena tidak ada keterangan apapun tentang bola-bola yang ada dalam kotak kecuali tentang warnanya maka bola-bola itu dapat diasumsikan (dianggap) sama ukurannya (seukuran) sehingga peluang terambilnya masing-masing obyek (dalam hal ini masing-masing bola) adalah sama. Berdasarkan asumsi tersebut, cara-cara yang dapat dilakukan untuk memecahkan soal tersebut antara lain adalah sebagai berikut.

Cara 1

Dengan menuliskan seluruh anggota ruang sampel dari eksperimen itu, mengidentifikasi peristiwa yang dimaksud kemudian menentukan nilai peluangnya.

a)



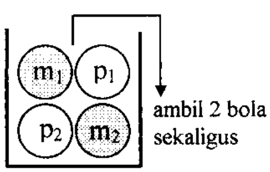
$S = \{m_1, m_2, p_1, p_2\}$

A = peristiwa terambilnya bola merah

$= \{m_1, m_2\}$, maka

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

b)



$S = \{m_1p_1, m_1p_2, m_1m_2, p_1p_2, p_1m_2, p_2m_2\}$

$= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Maka $n(S) = 6$

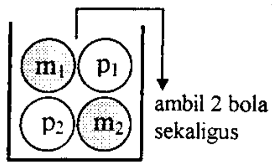
A = peristiwa kedua bola yang terambil berwarna merah.

$= \{m_1m_2\} = \{e_3\}$. Maka $n(A) = 1$.

Dengan demikian maka $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$.

Cara 2

Dengan menalar kategori hasil-hasil eksperimen yang mungkin terjadi jika pada himpunan $H = \{m_1, m_2, p_1, p_2\}$ diambil obyek (sebuah bola, atau 2 bola sekaligus) termasuk kategori apa (salah satu diantara tiga : pengulangan dimungkinkan, permutasi, atau kombinasi).



Analisis Hasil.

1) Hasil seperti m_1m_1 ... (tak mungkin). Jadi 2 bola yang terambil sekaligus itu tidak mungkin hasilnya m_1m_1 atau p_1p_1 atau p_2p_2 atau m_2m_2. Maka pengulangan elemen pada himpunan H tidak dimungkinkan.

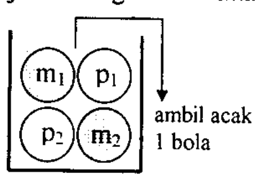
2) Kemungkinannya tinggal permutasi atau kombinasi.
Hasil seperti
m_1p_1 = yang terambil adalah m_1 dan p_1
= yang terambil adalah p_1 dan m_1 = p_1m_1
Karena $m_1p_1 = p_1m_1$ maka eksperimennya berupa kom-binasi.

3) Karena kategori hasil eksperimennya adalah kombinasi, maka

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(\text{terambilnya 2 bola merah dari 2 bola merah})}{n(\text{terambilnya 2 bola dari semuanya 4 bola})} = \frac{C_2^2}{C_2^4} = \frac{1}{6}.$$

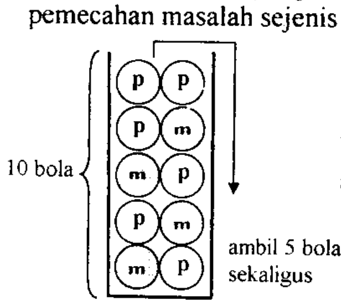
Sejalan dengan itu maka untuk pertanyaan a,



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(\text{terambilnya i bola merah dari 2 bola merah})}{n(\text{terambilnya 1 bola dari semuanya 4 bola})}$$

$$= \frac{C_1^2}{C_1^4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Dengan penalaran yang sama seperti cara 2 tersebut, kita dapat melakukan pemecahan masalah sejenis untuk obyek yang lebih banyak, misalnya



Berapakah peluang dari 5 bola yang terambil 2 bola diantaranya berwarna merah dan 3 bola diantaranya berwarna putih, jika secara acak diambil 5 bola sekaligus.

Jawab.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(\text{terambilnya 2 bola merah dari 4 bola dan 3 bola putih dari 6 bola})}{n(\text{terambilnya 5 bola dari semuanya 10 bola})}$$

$$= \frac{C_2^4 . C_3^6}{C_5^{10}} = \frac{6 \times 20}{6 \times 6 \times 7} = \frac{10}{21}.$$

3. ***Berdasarkan Tinjauan Secara Aksiomatik***

Tinjauan peluang secara aksiomatik dikemukakan oleh A.N. Kolmogorov. Tujuannya agar sebagai bagian dari matematika peluang memenuhi sifat deduktif dan konsisten. Aksioma yang dimaksud adalah seperti berikut.

Aksioma Peluang

Misalkan S adalah ruang sampel. Untuk sembarang peristiwa A dalam S suatu ukuran mengenai sering atau jarangnya peristiwa itu muncul dilambangkan dengan P(A). Maka P(A) disebut peluang munculnya peristiwa A jika ketiga aksioma berikut dipenuhi

Aksioma 1 : Untuk setiap peristiwa A, $0 \leq P(A) \leq 1$

Aksioma 2 : $P(S) = 1$

Aksioma 3 : Jika A dan B adalah peristiwa yang saling asing (lepas), maka

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dengan ketiga aksioma tersebut teorema-teorema tentang peluang dapat dibuktikan sejalan dengan teorema-teorema pada definisi empirik dan klasik.

C. KEPASTIAN DAN KEMUSTAHILAN

Dalam suatu eksperimen terhadap suatu obyek tertentu ada peristiwa yang pasti terjadi (selalu terjadi) dan ada pula peristiwa yang tak mungkin terjadi (tak pernah terjadi) kapanpun dan dimanapun eksperimen itu dilakukan. Pada topik peluang, peristiwa yang selalu terjadi nilai peluangnya didefinisikan sama dengan satu sedangkan peristiwa yang tidak mungkin terjadi didefinisikan nilai peluangnya sama dengan nol.

Secara matematika ditulis

$P(A) = 0 \Leftrightarrow$ peristiwa A tak mungkin terjadi

$P(A) = 1 \Leftrightarrow$ peristiwa A pasti terjadi.

Kepastian adalah suatu jaminan bahwa dalam suatu eksperimen peristiwa yang dimaksud pasti terjadi. Sebaliknya, kemustahilan adalah suatu jaminan bahwa dalam suatu eksperimen peristiwa yang dimaksud tak mungkin terjadi.

Contoh

1. Pada eksperimen terhadap paku payung (pines) mungkinkah diperoleh hasil pines berdiri? Tentukan nilai P(pines berdiri) = ...

2. Pada eksperimen terhadap paku asbes (asbes adalah bahan bangunan untuk atap rumah, ada asbes gelombang besar dan ada asbes gelombang kecil), mungkinkah diperoleh hasil paku asbes miring? Tentukan nilai P(paku asbes miring) = ...

Praktikkan kedua eksperimen itu!

D. FREKUENSI HARAPAN

Sebagai gambaran mengenai frekuensi harapan Anda diminta untuk menjawab permasalahan-permasalahan berikut menurut kata hati dan perasaan Anda.

4. Bila sebuah dadu dilambungkan sebanyak 600 kali, berapa kalikah diharapkan akan muncul mata 5?
5. Bila kita melambungkan sekeping mata uang logam sebanyak 100 kali. Berapa kalikah diharapkan akan muncul muka G?
6. Dalam 1000 kali kelahiran (tanpa kelahiran kembar), ada berapa bayi laki-laki yang diharapkan akan lahir?

Apa yang mendasari landasan berpikir kita sehingga kata hati dan perasaan Anda menjawab seperti itu?

Jawaban dari pertanyaan-pertanyaan di atas adalah permasalahan tentang frekuensi harapan yang dimaksud pada studi masalah peluang. Sekarang apa jawaban Anda atas tiga pertanyaan di atas? Jawaban yang mungkin adalah:

1. Jawaban yang mungkin sekitar 100 kali sebab peluang munculnya mata dadu 5 adalah $\frac{1}{6}$ sementara percobaan dilakukan sebanyak 600 kali.
2. Jawaban yang mungkin sekitar 50 kali sebab peluang munculnya muka G adalah $\frac{1}{2}$ sementara percobaan dilakukan sebanyak 100 kali.
3. Jawaban yang mungkin akan lahir sekitar 500 bayi laki-laki sebab peluang lahirnya bayi laki-laki $\frac{1}{2}$ sementara kelahirannya sebanyak 1000 kali.

Jawaban seperti 100 kali, 50 kali, dan 500 kali tersebut di atas adalah nilai dari frekuensi harapan yang dimaksud pada suatu peristiwa. Secara matematik frekuensi harapan dalam suatu peristiwa (kejadian) didefinisikan seperti berikut:

> Frekuensi harapan munculnya suatu peristiwa ialah nilai peluang munculnya peristiwa itu dikalikan dengan banyaknya percobaan, sehingga
> $$\mathbf{F_h = n \,.\, P(E)}$$
> dengan E adalah peristiwa yang diamati.

Dengan demikian maka jawaban untuk nomor

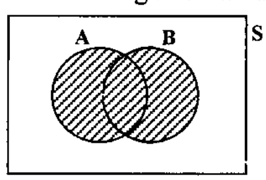
1. Frekuensi harapannya adalah $F_h = n \,.\, P(E)$
$$= 600 \,.\, \frac{1}{6} = 100$$
2. Frekuensi harapannya adalah $F_h = n \,.\, P(E)$
$$= 100 \,.\, \frac{1}{2} = 50$$
3. Frekuensi harapannya adalah $F_h = n \,.\, P(E)$

$$= 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

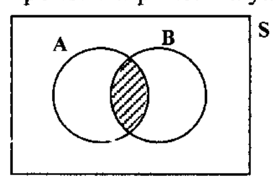
E. RELASI ANTAR PERISTIWA

7. *Rangkaian Dua Peristiwa*

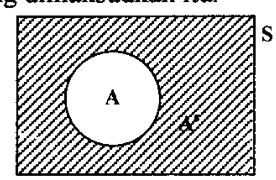
Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen. A dan B adalah sembarang peristiwa dalam ruang sampel S. Peristiwa tunggal yang mengaitkan antara peristiwa A dengan peristiwa B yakni peristiwa munculnya "A atau B" ditulis dengan lambang "$A \cup B$" sedangkan peristiwa munculnya "A dan B" ditulis dengan lambang "$A \cap B$". Peristiwa "bukan A" atau "komplemen dari A" ditulis dengan lambang A' atau A^c. Bagian yang diarsir pada diagram Venn berikut adalah gambaran dari peristiwa-peristiwa yang dimaksudkan itu.



$A \cup B$ = A atau B



$A \cap B$ = A dan B



$A' = A^c$ = bukan A

Lebih lanjut dalam bentuk himpunan disepakati bahwa ruang sampel S dipandang sebagai himpunan semesta dari eksperimennya, sedangkan peristiwa merupakan himpunan bagian dari S. Untuk ruang sampel S yang berhingga (dapat dihitung banyak anggotanya), maka setiap peristiwa dalam S juga akan berhingga banyak anggotanya. Pada ruang sampel berhingga ini berlaku prinsip penjumlahan seperti berikut.

Prinsip Penjumlahan

Jika suatu eksperimen memiliki ruang sampel berhingga, sedangkan E adalah peristiwa dalam ruang sampel S dengan m titik sampel, yakni:

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$$

maka peluang munculnya peristiwa E adalah

$$P(E) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_m\})$$

Keterangan:

$P(E) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_m\})$ masing-masing adalah peluang munculnya peristiwa-peristiwa elementer $\{e_1\}, \{e_2\}, \ldots, \{e_m\}$ dalam E.

Dari prinsip penjumlahan itu selanjutnya dapat disimpulkan bahwa peluang munculnya suatu peristiwa merupakan jumlah peluang munculnya titik-titik sampel yang ada dalam peristiwa itu.

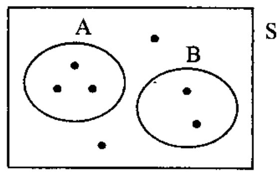
Contoh

1. Untuk eksperimen menggunakan sekeping mata uang diperoleh S = {A, G} dengan $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(G) = \frac{1}{2}$.

2. Untuk eksperimen menggunakan sebuah dadu diperoleh S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dengan $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.
3. Untuk eksperimen menggunakan sebuah paku payung (pines) diperoleh S = {t(terlentang), m(miring)} dengan $P(\{t\}) = 0{,}69$ dan $P(\{m\}) = 0{,}31$.

8. *Relasi Lepas*

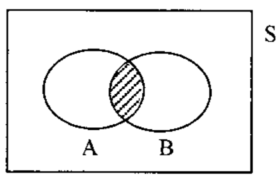
Dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel S disebut lepas apabila dalam eksperimen yang menghasilkan ruang sampel S itu kedua peristiwa (A dan B) tidak mungkin terjadi secara bersamaan. Karena tidak mungkin terjadi secara bersamaan dalam eksperimen yang sama maka $A \cap B = \varnothing$.



A dan B adalah 2 peristiwa lepas.

9. *Relasi Bebas*

Dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel S disebut bebas apabila $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Bila tidak sama maka dikatakan bahwa peristiwa A dan B tidak saling bebas.



A dan B bebas $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

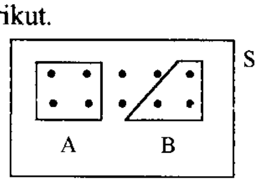
10. *Relasi Komplemen*

Dua peristiwa A dan B dalam ruang sampel S disebut saling berkomplemen jika $A \cap B = \varnothing$ dan $P(A) + P(B) = 1 = P(S)$ yaitu apabila $P(B) = 1 - P(A)$ atau $P(A) = 1 - P(B)$ atau apabila A = bukan B dan sebaliknya B = bukan A.

Contoh

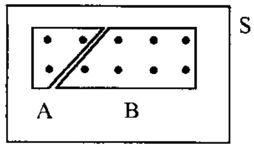
Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dengan n(S) = 10 dan masing-masing titik sampelnya berpeluang sama untuk muncul. Dua peristiwa A dan B dalam S masing-masing akan mempunyai relasi lepas, bebas, tak bebas, atau komplemen apabila diagram Venn yang ditunjukkannya adalah sebagai berikut.

a.

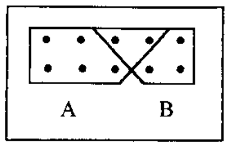


A dan B adalah <u>2 peristiwa lepas</u>.

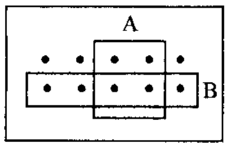
b.



A dan B adalah <u>2 peristiwa komplemen</u>.
A = bukan B atau B = bukan A, ditulis
$B = A^c \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

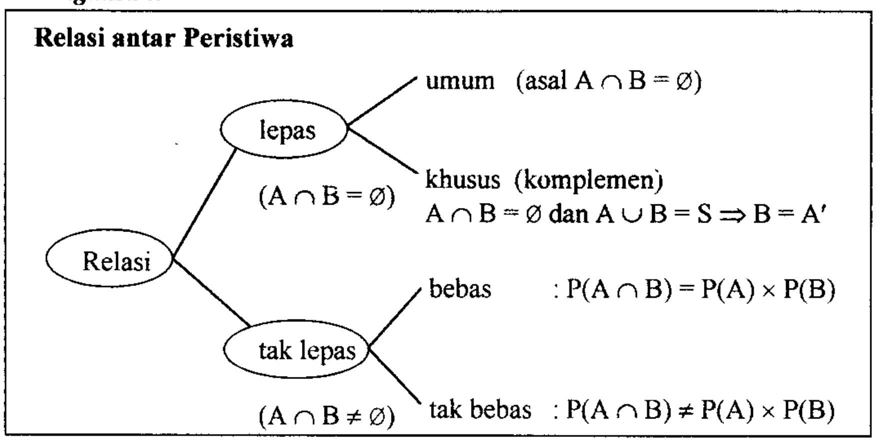
c. 

$P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{10}$.
Ternyata $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, maka A dan B adalah <u>2 peristiwa tak bebas</u>.

d. 

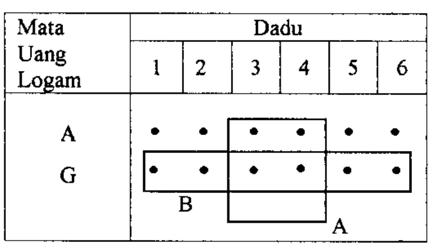
$P(A) = \frac{4}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.
Ternyata $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, maka A dan B adalah <u>2 peristiwa bebas</u>.

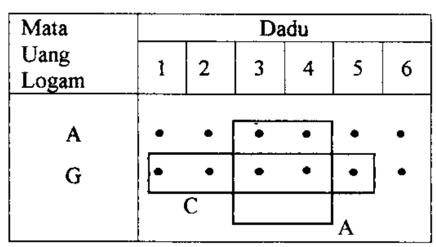
Ringkasan.



Latihan 3

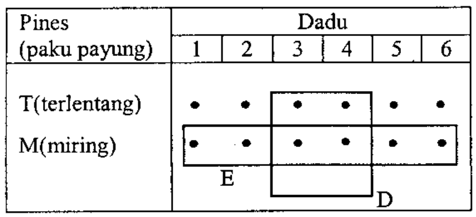
1. Diagram berikut adalah ruang sampel dari sebuah dadu dan sekeping mata uang logam yang diundi sekaligus.

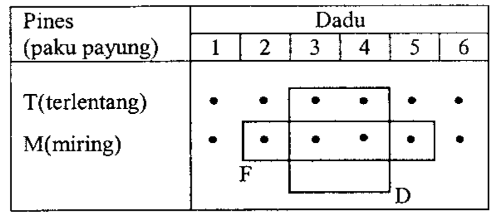




a. Tentukan relasi antara peristiwa A dan B
b. Tentukan relasi antara peristiwa A dan C
c. Definisikan masing-masing peristiwa A, B, dan C tersebut
d. Bila tanpa menghitung, apa kira-kira ciri dua peristiwa yang diagramnya berpootngan saling bebas atau tidak?

2. Diagram berikut adalah ruang sampel dari sebuah dadu dan sebuah pines (paku payung) yang diundi sekaligus.





a. Tentukan relasi antara peristiwa D dan E
b. Tentukan relasi antara peristiwa D dan F
c. Definisikan masing-masing peristiwa D, E, dan F tersebut
d. Berlakukah jawaban pertanyaan 1d di atas untuk dadu dan paku payung? (dadu masing-masing titik sampelnya berpeluang sama untuk sementara paku payung tidak).

3. Misalkan dua buah dadu diundi sekaligus dan S adalah ruang sampelnya A dan B adalah dua peristiwa dalam S. Tentukan relasi antara A dan B jika
a. A adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu maksimal 4.
B adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu minimal 7.
b. A adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu minimal 9.
B adalah peristiwa munculnya jumlah kedua mata dadu maksimal 8.
c. A adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6.
B adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6.
d. A adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6.
B adalah peristiwa munculnya muka dadu pertama antara 3 dan 6, dan dadu kedua minimal 3.

Petunjuk pengerjaan soal no.3.

Gambarkan diagram Venn dari masing-masing peristiwa A dan B tersebut dalam bentuk sketsa seperti gambar di soal nomor 1 dan 2.

Catatan.

Dalam bentuk soal cerita relasi antara peristiwa A dan B pada suatu eksperimen disebut:

1. ***Lepas****, jika kedua peristiwa dalam eksperimen itu tak mungkin terjadi secara bersamaan.*
2. ***Bebas****, jika dalam eksperimen itu peluang munculnya peristiwa yang satu tidak dipengaruhi oleh peluang munculnya peristiwa yang lain demikian pula sebaliknya.*

Setelah mengetahui kedua ciri tersebut, coba renungkan apa perbedaan mendasar yang membedakan peristiwa bebas dan tak bebas jika kita hanya melihat diagramnya saja.

B. BEBERAPA TEOREMA (DALIL) DASAR PADA PELUANG

Seperti yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa peristiwa adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Sedangkan peristiwa elementer ialah peristiwa yang hanya memuat satu titik sampel. Selanjutnya apabila

$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ maka

$P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_n\}) = 1$.

Dengan demikian jika E suatu peristiwa maka $\varnothing \subseteq E \subseteq S$, sehingga peluang munculnya peristiwa E memiliki kisaran $0 \le P(E) \le 1$.

$P(E) = 0$ artinya peristiwa E tak mungkin terjadi

$P(E) = 1$ artinya peristiwa E pasti terjadi.

Apabila peristiwa E memuat m titik sampel yaitu

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ maka $P(E) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots + P(\{e_m\})$.

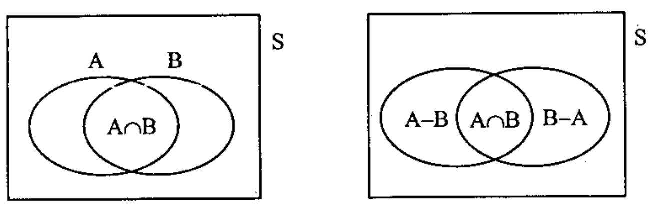
Dalil 1. Jika A dan B adalah peristiwa lepas, maka
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Bukti:

Karena A dan B dua peristiwa lepas (dua peristiwa yang tidak mungkin terjadi secara bersamaan/disjoint/saling asing) maka banyaknya titik sampel pada peristiwa $A \cup B$ sama dengan banyaknya titik sampel pada peristiwa A ditambah banyaknya titik sampel pada peristiwa B. Akibatnya peluang munculnya peristiwa $A \cup B$ sama dengan jumlah dari peluang munculnya semua titik sampel pada peristiwa A dan pada peristiwa B, atau $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$■

Dalil 2. Jika A dan B adalah sembarang dua peristiwa (dapat berpotongan atau saling asing) dalam suatu ruang sampel S, maka
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti:



Seperti yang dapat dilihat pada sajian gambar di atas peristiwa $A \cup B$ dapat dinyatakan sebagai gabungan 3 peristiwa yaitu

$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ .... (1)

Karena ketiga peristiwa yang ada di ruas kanan saling asing/lepas maka menurut dalil 1 akan diperoleh bentuk persamaan.

$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$ .... (2)

Tetapi karena

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$ .... (3)

$B = (B - A) \cup (A \cap B)$ .... (4)

Sedangkan ruas kanan (3) dan (4) masing-masing juga merupakan gabungan dua peristiwa lepas, maka

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ atau $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ..... (5)

$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ atau $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ ...... (6)

Dengan melakukan substitusi persamaan (5) dan (6) ke persamaan (2) akan diperoleh

$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

Sehingga

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$■

Peristiwa Komplemen

Dalil 3. Jika A adalah suatu peristiwa dalam ruang sampel S sehingga peluang munculnya peristiwa A adalah P(A), maka peluang munculnya peristiwa bukan A ialah $P(A') = 1 - P(A)$

Bukti:

Karena $A \cup A' = S$ dan $A \cap A' = \varnothing$ maka dengan menerapkan dalil 1 diperoleh

$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ ..... sebab A dan A′ saling lepas.

Sehingga

$P(A') = 1 - P(A)$■

Latihan 4

1. Misalkan A dan B adalah dua peristiwa lepas pada suatu eksperimen $P(A) = 0{,}2$ dan $P(B) = 0{,}5$. Tentukan peluang munculnya peristiwa:
   (a) A atau B
   (b) A dan B
   (c) bukan A
2. Misal A, B, dan C adalah tiga peristiwa yang saling lepas.
   $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}3$ dan $P(C) = 0{,}4$. Tentukan peluang:
   (a) terjadinya peristiwa A atau B
   (b) terjadinya peristiwa B atau C
   (c) terjadinya peristiwa A atau B atau C.
3. Misalkan A dan B adalah peristiwa-peristiwa pada suatu eksperimen.
   $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}7$; dan $P(A \cup B) = 0{,}8$. Tentukan $P(A \cap B)$.
4. Misalkan E dan F adalah peristiwa-peristiwa pada suatu eksperimen.
   $P(E) = 0{,}30$; $P(F) = 0{,}10$ dan $P(E \cap F) = 0{,}05$. tentukan
   (a) $P(E')$
   (b) $P(F')$
   (c) $P(E \cup F)$
5. Misalkan $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ adalah ruang sampel dari suatu eksperimen dengan $P(\{e_1\}) = 0{,}2$; $P(\{e_2\}) = 0{,}1$; $P(\{e_3\}) = 0{,}3$; $P(\{e_4\}) = 0{,}1$ dan $P(\{e_5\}) = 0{,}3$. Jika $E = \{e_1, e_3\}$, $F = \{e_1, e_4, e_5\}$, dan $G = \{e_2, e_4, e_5\}$.
   Tentukan
   (a) $P(E')$ (d) $P(E \cap G)$
   (b) $P(E \cup F)$ (e) P(E dan F)

(c) $P(G \cap F)$ (f) P(F atau G)

6. Misalkan $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ adalah ruang sampel dari suatu eksperimen. Jika $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = P(\{e_3\}) = \frac{1}{4}$ dan $P(\{e_4\}) = P(\{e_5\}) = \frac{1}{8}$,
   (a) Tunjukkan bahwa peristiwa $A = \{e_1, e_2\}$ dan $B = \{e_2, e_3\}$ adalah dua peristiwa bebas.
   (b) Tunjukkan peristiwa $C = \{e_3, e_4\}$ dan $D = \{e_4, e_5\}$ adalah dua peristiwa tak bebas.
7. Misalkan A dan B adalah dua peristiwa yang berhubungan dengan suatu eksperimen. $P(A) = 0{,}5$ dan $P(A \cup B) = 0{,}8$. Jika $P(B) = x$, tentukan x agar peristiwa.
   (a) A dan B merupakan dua peristiwa lepas
   (b) A dan B merupakan dua peristiwa bebas.

C. PENGAMBILAN SAMPEL SECARA ACAK

Pengertian sampel dalam pembicaraan peluang adalah sebagian obyek dari sejumlah obyek tertentu yang dikenal sebagai populasi. Himpunan dari semua sampel yang mungkin terambil dalam eksperimen berupa pengambilan secara acak sebagaian obyek (sampel) dari sejumlah obyek tertentu (populasi) tersebut dinamakan ruang sampel. Ada 2 (dua) cara pengambilan sampel (berupa sebagian obyek) dari sejumlah obyek yang diketahui (populasi) yaitu

Cara pengambilan sampel (secara acak) dari suatu populasi
1. Sekaligus 2. Satu demi Satu a. tanpa pengembalian b. dengan pengembalian

Secara konsep pengambilan sampel sekaligus bersesuaian dengan masalah kombinasi sementara pengambilan sampel satu demi satu (baik tanpa maupun dengan pengembalian) bersesuaian dengan diagram pohon.

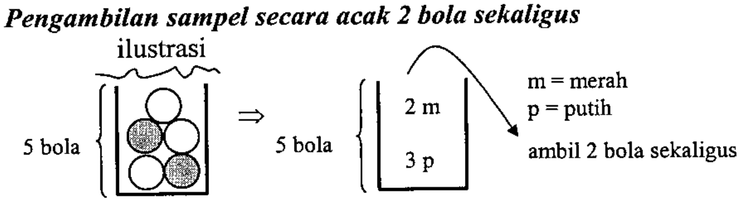
Contoh

Misalkan sebuah kotak berisi 5 bola, terdiri dari 2 bola berwarna merah dan 3 bola berwarna putih. Dari dalam kotak diambil secara acak 2 bola. Tentukan peluang 2 bola yang terambil itu terdiri dari 1 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna putih jika cara pengambilan sampelnya:

1. sekaligus
2. a. satu demi satu tanpa pengembalian
   b. satu demi satu dengan pengembalian

Jawab.

1. ***Pengambilan sampel secara acak 2 bola sekaligus***



Sejalan dengan yang telah dibahas sebelumnya (di halaman 26), maka

$$P(1m,\ 1p) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n(\text{terambilnya } 1m \text{ dan } 1p)}{n(\text{terambilnya 2 bola dari 5 bola})}$$

$$= \frac{n(\text{terambilnya } 1m \text{ dari } 2m \text{ dan } 1p \text{ dari } 3p)}{n(\text{terambilnya 2 bola dari 5 bola})}$$

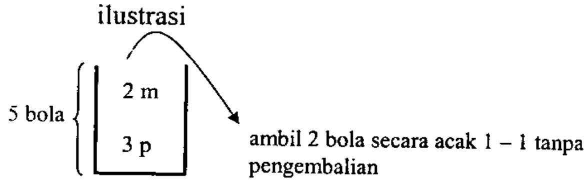
$$= \frac{C_1^2 . C_1^3}{C_2^5} = \frac{2.3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Jadi peluang dari 2 bola yang terambil terdiri atas 1 merah dan 1 putih adalah $\frac{3}{5}$.

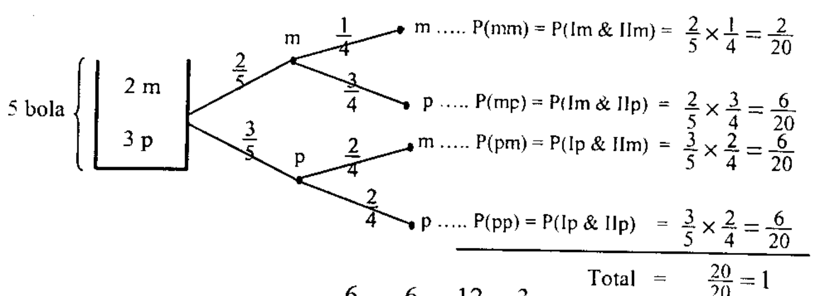
Tugas
Untuk memperdalam pemahaman, Anda diminta untuk mencocokkan benarkah n(S) = n(2 bola) = n(2 bola dari 5 bola) = C_2^5 = 10 itu dimungkinkan terdiri dari
n(1m, 1p) = n(1m dari 2m dan 1p dari 3p)
n(2m, 0p) = n(2m dari 2m dan 0p dari 3p)
n(0m, 2p) = n(0m dari 2m dan 2p dari 3p).
Sehingga bila hasilnya dijumlahkan cocok = 10?

2. *a. **Pengambilan sampel (secara acak 2 bola) satu demi satu tanpa pengembalian)***

ilustrasi



(i) Identifikasi menggunakan diagram pohon lengkap

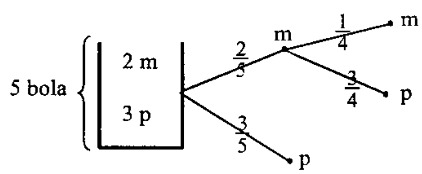


$$P(1m,\ 1p) = P(mp) + P(pm) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

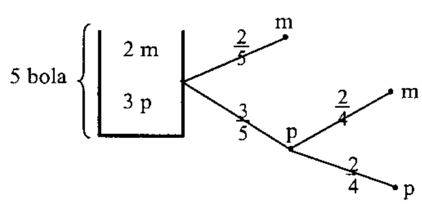
Jadi peluang dari 2 bola yang terambil terdiri atas 1 merah dan 1 putih adalah $\frac{2}{5}$.

Catatan:

- Gambaran dengan diagram pohon lengkap dimaksudkan untuk memberikan informasi seutuhnya bahwa jumlah distribusi peluangnya = 1.
- Romawi I dan II dimaksudkan sebagai lambang untuk pengambilan pertama dan kedua.
- Pada pengambilan I jumlah bola seluruhnya masih 5, karena tanpa pengembalian maka pada pengambilan II jumlahnya tinggal 4. Dengan demikian bila pengambilan I mendapat merah (m) maka pada pengambilan II bola merah yang semula ada 2 saat akan dilakukan pengambilan II banyaknya bola merah menjadi berkurang sebuah = 2 – 1 = 1. Sementara itu bola putihnya saat akan dilakukan pengambilan II masih utuh sebanyak 3 sebab pada pengambilan I yang terambil adalah bola merah. Itulah sebabnya maka nilai peluang yang ditunjukkan pada cabang-cabang bagian atas adalah seperti itu, yakni:

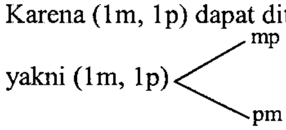


Cara penalaran yang sama dilakukan untuk menuliskan nilai-nilai peluang pada cabang-cabang bagian bawah sehingga diperoleh



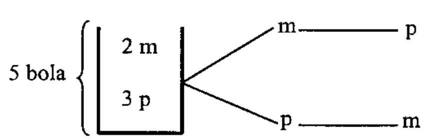
(ii) Identifikasi menggunakan diagram pohon tak lengkap

Karena (1m, 1p) dapat diterjemahkan menjadi 2 cara yaitu mp atau pm

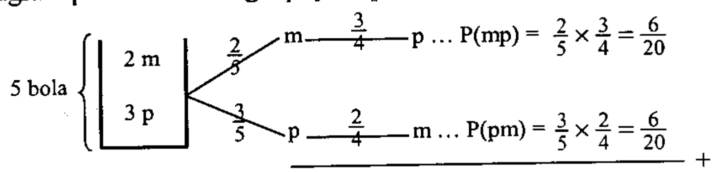


maka diagram pohon yang dimaksud berbentuk

seperti berikut.



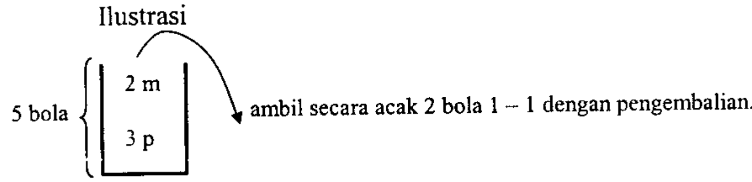
Dengan penalaran yang sama dengan pada catatan, akan diperoleh isian dari diagram pohon itu selengkapnya seperti berikut.



$$P(1m, 1p) = P(mp) + P(pm) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

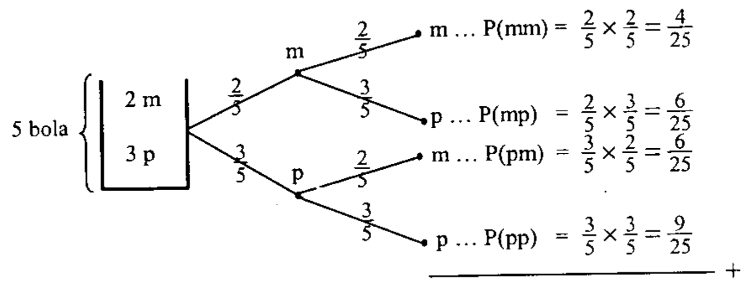
b. Pengambilan sampel (secara acak 2 bola) satu demi satu dengan pengembalian

Ilustrasi



Karena pengambilannya dengan pengembalian berarti sebelum melakukan pengembalian berikutnya, bola yang sudah terambil sebelumnya harus dikembalikan dan seluruh bola harus diacak lagi. Akibatnya banyaknya bola pada pengambilan-pengambilan bola tetap seperti semula, demikian pula tentang komposisinya. Gambaran selengkapnya seperti berikut.

(iii) Identifikasi menggunakan diagram pohon lengkap



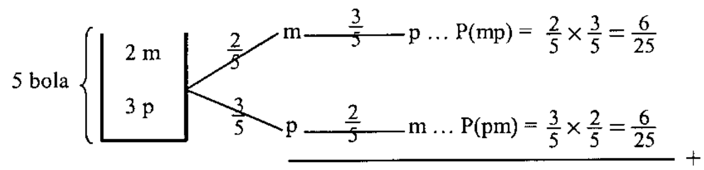
$$\text{Total} = \frac{25}{25} = 1$$

$$P(1m, 1p) = P(mp) + P(pm) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}.$$

(iv) Identifikasi menggunakan diagram pohon tak lengkap

Karena (1m, 1p) = mp atau pm, yakni $(1m, 1p) \left\langle \begin{matrix} mp \\ pm \end{matrix} \right.$

sementara pengambilan sampelnya dengan pengembalian maka diagram pohon dan isian selengkapnya adalah seperti berikut.



$$P(1m, 1p) = P(mp) + P(pm) \quad = \frac{12}{25}.$$

Latihan 5

Gunakan diagram pohon lengkap untuk menjawab pertanyaan b dan c pada soal-soal berikut.

1. Sebuah kotak berisi 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna putih. Dari dalam kotak diambil secara acak sebanyak 2 bola. Tentukan peluang terambilnya bola merah dan bola putih masing-masing 1 buah jika pengambilannya:
   a. sekaligus
   b. satu demi satu tanpa pengembalian
   c. satu demi satu dengan pengembalian.
   Apakah jawaban pertanyaan a dan b sama nilai peluangnya?
2. Sebuah kotak berisi 10 bola terdiri dari 5 bola berwarna merah, 3 bola berwarna putih dan 2 bola berwarna kuning. Dari dalam kotak diambil secara acak 3 bola. Tentukan peluang terambilnya 1 bol merah, 1 bola putih, dan 1 bola kuning jika pengambilannya:
   a. sekaligus
   b. satu demi satu tanpa pengembalian
   c. satu demi satu dengan pengembalian.
   Apakah jawaban pertanyaan a dan b sama nilai peluangnya?
3. Dari seperangkat kartu bridge (sebanyak 52 kartu) dilakukan pengambilan secara acak sebanyak 2 kartu. Tentukan peluang terambilnya salah satu kartu berupa kartu sekop jika pengambilannya:
   a. sekaligus
   b. satu demi satu tanpa pengembalian
   c. satu demi satu dengan pengembalian.
   Apakah jawaban pertanyaan a dan b sama nilai peluangnya?
4. Jika pada seperangkat kartu bridge dilakukan pengambilan secara acak sebanyak 3 kartu, tentukan peluang terambilnya kartu sekop sebanyak 2 kartu jika pengambilannya:
   a. sekaligus
   b. satu demi satu tanpa pengembalian
   c. satu demi satu dengan pengembalian.
   Apakah jawaban pertanyaan a dan b sama nilai peluangnya?
   Dapatkah Anda menunjukkan bentuk umumnya?

D. PENGUNDIAN SEKALIGUS DAN PENGUNDIAN BERULANG

Dalam peluang ada obyek-obyek yang digunakan untuk eksperimen seperti misalnya dadu, mata uang, dan pines. Eksperimennya dapat berupa pengundian beberapa obyek sekaligus atau pengundian sebuah obyek beberapa kali. Sebagai contoh misalnya sebuah dadu diundi sebanyak 3 kali dan urutan hasil-hasilnya dicatat. Di lain pihak diundi 3 buah dadu sekaligus. Misalkan hasil eksperimen pertama adalah (1, 3, 2). Pertanyaannya: apa arti hasil (1, 3, 2) pada eksperimen pertama dan apa arti (1, 3, 2) pada eksperimen kedua? Adakah perbedaan banyaknya anggota ruang sampel pada eksperimen pertama dibandingkan dengan banyaknya anggota ruang sampel pada eksperimen kedua? Kemukakan argumentasi Anda.

Pada permainan dadu, ada jenis permainan dimana 3 dadu diundi sekaligus. Mata-mata dadu yang seharusnya bermuka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 sudah diganti permukaannya dengan muka-muka yang bertanda merah, hijau, palang, lorek dan seterusnya. Jika seseorang mengincar muka merah misalnya, ia menjatuhkan taruhannya berupa uang misal Rp 1.000,00 di tempat yang disediakan. Jika dari ketiga dadu tidak ada yang muncul muka merah, bandar akan mengambil uang Rp 1.000,00 itu. Sebaliknya jika muka merah muncul, uang Rp 1.000,00 akan dikembalikan oleh bandar kepada petaruh ditambah Rp 1.000,00 jika muka merah muncul 1 kali, Rp 2.000,00 jika muka merah muncul 2 kali, dan Rp 3.000,00 jika muka merah muncul 3 kali. Pertanyaan yang harus dijawab adalah cukup fair (adilkah) aturan seperti itu diterapkan? Uraian berikut akan memberikan petunjuk secara rasional dari jawaban atas pertanyaan itu.

Misalkan S adalah ruang sampel dari 3 buah dadu yang diundi sekaligus tersebut. Maka S = {111, 112, 113, ..., 211, 212, ..., 665, 666}

$= \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{37}, e_{38}, \ldots, e_{215}, e_{216}\}$.

Dengan demikian n(S) = 216. Mengapa? (beri alasan). Jika muka dadu 6 adalah yang diganti dengan muka merah yang diincar oleh petaruh itu dan ternyata muncul, berarti si petaruh sukses. Dengan bagitu maka

s(sukses) = muncul muka 6, artinya $s = 6$ atau $s \in \{6\}$ g(gagal) = muncul muka selain 6, artinya $g \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Salah satu hasil yang mungkin muncul (berupa titik sampel) seperti misalnya e_{215} = 665 = ssg = sukses, sukses, gagal artinya adalah dadu pertama sukses, kedua sukses, dan ketiga gagal. Berdasarkan prinsip perkalian, banyaknya cara mendapatkan sukses, sukses, gagal adalah

$$\boxed{n(ssg) = n(\text{sukses, sukses, gagal}) = n(s) \times n(s) \times n(g) = 1 \times 1 \times 5 = 5.}$$

Selanjutnya distribusi (penyebaran) dari ruang sampel S dengan n(S) = 216 selengkapnya adalah sebagai berikut.

0 kali sukses $\Rightarrow$ ggg ..... 1 pola = $C_0^3 \Rightarrow n(0 \text{ sukses}) = C_0^3 \times 5 \times 5 \times 5$

$= C_0^3 \times 5^3 = 125$

1 kali sukses $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \text{gg6} \\ \text{g6g} \\ \text{6gg} \end{matrix}\right\}$ ..... 3 pola = $C_1^3 \Rightarrow n(1 \text{ sukses}) = C_1^3 \times 5^2 = 75$

2 kali sukses $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} \text{g66} \\ \text{6g6} \\ \text{66g} \end{matrix}\right\}$ ..... 3 pola = $C_2^3 \Rightarrow n(2 \text{ sukses}) = C_1^3 \times 5^1 = 15$

3 kali sukses $\Rightarrow$ 666 ..... 1 pola = $C_3^3 \Rightarrow n(3 \text{ sukses}) = C_3^3 \times 5^0 = 1$ +

Total $= 216$.

Dari distribusi banyaknya cara untuk sukses dan gagal tersebut akan kita dapatkan hasil-hasil seperti berikut:

$$P(0 \text{ sukses}) = P(\text{gagal total}) = \frac{125}{216}$$

$$P(1 \text{ sukses}) = P(1 \text{ kali sukses dan } 2 \text{ kali gagal}) = \frac{75}{216}$$

$$P(2 \text{ sukses}) = P(2 \text{ kali sukses dan } 1 \text{ kali gagal}) = \frac{15}{216}$$

$$P(3 \text{ sukses}) = P(3 \text{ kali sukses dan } 0 \text{ kali gagal}) = \frac{1}{216} \quad +$$

$$\text{Total} = \frac{216}{216} = 1.$$

Karena bandar akan membayar senilai uang taruhan untuk 1 kali sukses, 2 kali uang taruhan untuk 2 kali sukses, dan 3 kali uang taruhan untuk 3 kali sukses maka

$$P(1 \text{ sukses}) \text{ menjadi} = 1 \times \frac{75}{216} = \frac{75}{216}$$

$$P(2 \text{ sukses}) \text{ menjadi} = 2 \times \frac{15}{216} = \frac{30}{216}$$

$$P(3 \text{ sukses}) \text{ menjadi} = 3 \times \frac{1}{216} = \frac{3}{216} \quad +$$

$$P(\text{mendapat hadiah}) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}.$$

Karena P(mendapat hadiah) = $\frac{1}{2}$ maka P(tak mendapat hadiah) = $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Karena peluang untuk mendapat hadiah dan tak mendapatkan hadiah adalah sama, maka secara matematis permainan dadu dalam bentuk 3 dadu diundi sekaligus dengan aturan seperti itu (1 sukses dibayar 1 kali nilai taruhan, 2 sukses dibayar 2 kali nilai taruhan dan 3 sukses dibayar 3 kali nilai taruhan) merupakan permainan yang fair.

Latihan 6

1. Dua buah dadu diundi sekaligus. Tentukan peluang munculnya muka 4 paling sedikit 1 kali.
   Catatan.
   Kerjakan dengan 2 cara. Cara pertama menggunakan tabel dan cara kedua menggunakan pola 0 sukses, 1 sukses, dan 2 sukses.

2. Berapakah banyaknya anggota ruang sampel jika 4 buah dadu diundi sekaligus. Gambarkan distribusi anggota ruang sampel sebanyak itu ke dalam banyaknya cara mulai dari 0 kali sukses, 1 kali sukses, hingga 4 kali sukses jika sukses yang dimaksud adalah munculnya muka 1.
   Pertanyaan.
   a. Tentukan peluang munculnya muka 1 sebanyak 2 kali
   b. Tentukan peluang munculnya muka 1 paling banyak 2 kali
   c. Siapa yang diuntungkan (bandarnya atau petaruhnya).
      Jika muncul muka 1 sebanyak 1 kali dibayar 1 kali
      muncul muka 1 sebanyak 2 kali dibayar 2 kali
      muncul muka 1 sebanyak 3 kali dibayar 3 kali
      muncul muka 1 sebanyak 4 kali dibayar 4 kali.
      Selidikilah dengan menghitung nilai peluang si petaruh memenangkan undian dalam setiap ronde permainan.

3. a. Berapakah banyaknya anggota ruang sampel jika 3 buah paku payung (pines) diundi sekaligus.
   b. Dengan mengingat nilai peluang untuk setiap pines dalam 1 lambungan yakni $P(\text{terlentang}) = \frac{7}{10}$ dan $P(\text{miring}) = \frac{3}{10}$, tentukan nilai peluang untuk masing-masing titik sampelnya. Gunakan diagram pohon untuk memudahkannya.
   c. Tentukan peluang terjadinya 2 pines diantaranya terlentang
   d. Tentukan peluang terjadinya paling sedikit 2 pines diantaranya terlentang.

4. Empat keping uang logam diundi sekaligus
   a. Berapakah banyaknya anggota ruang sampel dalam eksperimen itu? Apakah masing-masing titik sampelnya berpeluang sama untuk muncul?
   b. Tentukan peluang munculnya muka angka sebanyak 2 kali
   c. Tentukan peluang munculnya muka angka paling sedikit 2 kali.

BAGIAN II
TEKNIK PERHITUNGAN BANYAK ANGGOTA RUANG SAMPEL

A. TEKNIK MENDATA ANGGOTA-ANGGOTA RUANG SAMPEL

Untuk mendata anggota-anggota ruang sampel hasil dari suatu eksperimen dapat dilakukan dengan 3 cara (Depdikbud, 1996:9) yaitu (1) dengan cara mendaftar, (2) dengan membuat diagram pohon, atau (3) dengan membuat tabel. Cara mendata anggota-anggota ruang sampel seperti yang telah dikemukakan di atas adalah cara mendaftar. Cara tersebut cukup mudah jika obyek eksperimennya hanya satu (tunggal) seperti misalnya satu mata dadu, satu mata uang dan seterusnya. Selain itu eksperimennya juga tidak berulang. Masalah akan lebih rumit apabila obyeknya tidak tunggal dan atau eksperimennya berulang. Untuk mengatasi hal-hal seperti itu cara yang lebih berlaku umum adalah dengan membuat diagram pohon. Cara yang lebih khusus untuk 2 obyek dengan sekali mengundi atau 1 obyek dengan 2 kali mengundi dapat dilakukan dengan cara membuat tabel.

Contoh

Tentukan ruang sampel dan banyak anggotanya dari eksperimen berupa

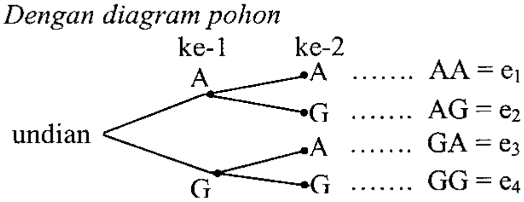
a. mengundi sekeping mata uang logam sebanyak 2 kali
b. mengundi 2 keping mata uang logam sekaligus.

Jawab

Karena ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dalam eksperimen, maka:

a. Untuk sekeping mata uang logam yang diundi 2 kali,
jika H_1 = hasil yang mungkin untuk undian ke-1
H_2 = hasil yang mungkin untuk undian ke-2
maka $H_1 = \{A, G\}$ dan $H_2 = \{A, G\}$. Selanjutnya

1) Dengan diagram pohon



Diperoleh $S = \{AA, AG, GA, GG\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Banyaknya anggota ruang sampel S adalah $n(S) = 4$.

2) Dengan membuat tabel

H_1 \ H_2	A	G
A	(A, A)	(A, G)
G	(G, A)	(G, G)

atau

H_1 \ H_2	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

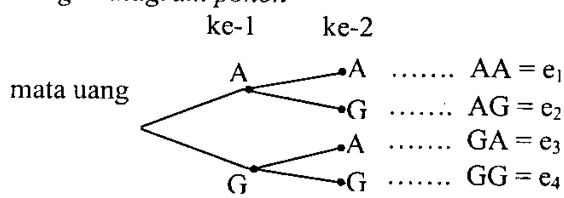
Diperoleh
$S = \{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$ atau

$S = \{AA, AG, GA, GG\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. $n(S) = 4$

b. Untuk 2 keping mata uang logam yang diundi sekaligus,

jika H_1 = hasil yang mungkin untuk mata uang ke-1
H_2 = hasil yang mungkin untuk mata uang ke-2.
maka $H_1 = \{A, G\}$ dan $H_2 = \{A, G\}$. Selanjutnya

1) Dengan diagram pohon



Diperoleh $S = \{AA, AG, GA, GG\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
Banyaknya anggota ruang sampel S adalah $n(S) = 4$.

2) Dengan membuat tabel

$H_1 \backslash H_2$	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

Diperoleh
$S = \{AA, AG, GA, GG\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. $n(S) = 4$

Catatan

1. Jawaban a dan b di atas memperlihatkan bahwa cara eksperimen mengundi sekeping mata uang logam 2 kali menghasilkan ruang sampel yang sama dengan eksperimen mengundi 2 keping mata uang logam sekaligus.
2. Perbedaan dari keduanya terletak pada "cara membacanya".
   Hasil seperti e_2 = AG dibaca "undian ke-1 muncul A dan undian ke-2 muncul G" (untuk sekeping mata uang logam diundi 2 kali)
   e_2 = AG dibaca "mata uang ke-1 muncul A dan mata uang ke-2 muncul G" (untuk 2 keping mata uang logam diundi sekaligus).

Latihan 1

1. Tentukan ruang sampel dan banyak anggotanya untuk eksperimen berupa:
   a. mengundi sebuah dadu dan sekeping mata uang logam sekaligus
   b. mengundi 2 buah dadu sekaligus
   c. mengundi 2 buah paku payung (pines) sekaligus.
   d. mengundi sekeping mata uang logam dan sebuah pines sekaligus
   e. mengundi sebuah dadu dan sebuah pines sekaligus.

2. Misalkan dalam suatu kotak terdapat 3 bola seukuran terdiri dari 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna putih (tandailah yang berwarna merah dengan m_1 dan m_2, sedangkan yang putih p_1). Tentukan ruang sampelnya berikut banyak anggotanya jika dari dalam kotak itu diambil acak
   a. 1 bola
   b. 2 bola sekaligus
   c. 3 bola sekaligus.
3. Sebuah kotak berisi 4 bola seukuran terdiri dari 2 bola berwarna merah dan 2 bola berwarna putih, tentukan ruang sampelnya berikut banyak anggotanya jika dari dalam kotak itu diambil secara acak
   a. 1 bola
   b. 2 bola sekaligus
   c. 3 bola sekaligus
   d. 4 bola sekaligus.

B. TEKNIK MENGHITUNG BANYAKNYA ANGGOTA RUANG SAMPEL

Untuk melakukan suatu eksperimen, syarat-syarat yang harus jelas ada adalah *obyek eksperimen* dan *cara melakukan eksperimen*. Obyek dari suatu eksperimen merupakan himpunan dan cara melakukan eksperimen akan menghasilkan rangkaian elemen-elemen tertentu dari himpunan itu. Suatu titik sampel dari eksperimen tertentu adalah salah satu rangkaian elemen-elemen yang kebetulan terjadi saat eksperimen itu diadakan. Cara eksperimen yang berbeda tentu akan menghasilkan titik-titik sampel yang berbeda pula. Dengan demikian cara eksperimen yang berbeda akan menghasilkan ruang sampel yang berbeda pula.

Contoh

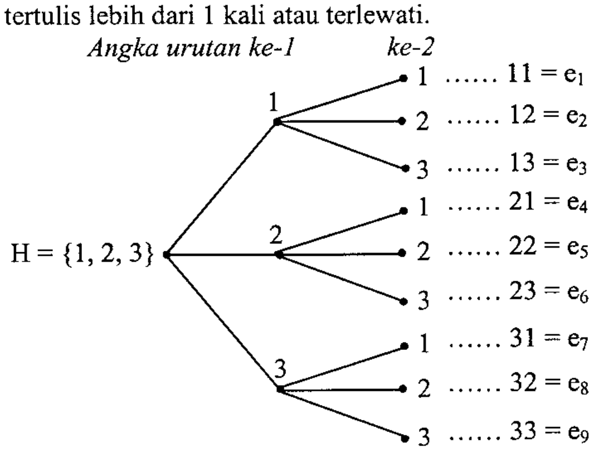
Dari himpunan {1, 2, 3} dilakukan eksperimen
a. membuat nomor lotere terdiri dari 2 angka
b. menyusun bilangan 2 angka yang angka-angkanya saling berlainan
c. menyusun himpunan-himpunan bagian yang memuat 2 elemen.

Tentukan ruang sampel masing-masing dan tuliskan banyak anggotanya.

Jawab

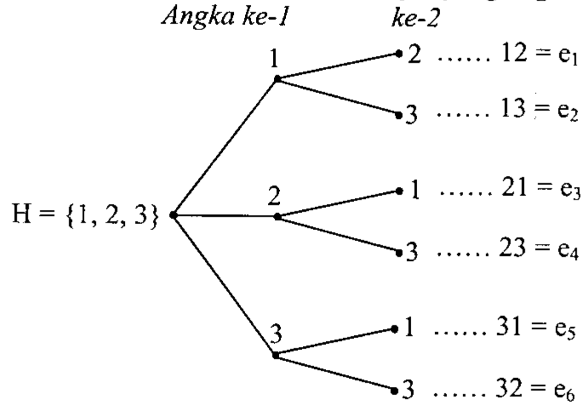
a. membuat nomor lotere terdiri dari 2 angka

Caranya dengan membuat diagram pohon, agar tidak ada titik sampel yang tertulis lebih dari 1 kali atau terlewati.



Maka ruang sampelnya: S = {11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33}
= {e_1, e_2, ..., e_9}. n(S) = 9

b. *menyusun bilangan-bilangan 2 angka yang angka-angkanya saling berlainan*



Maka ruang sampelnya S = {12, 13, 21, 23, 31, 32}
= {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6}. Sehingga n(S) = 6

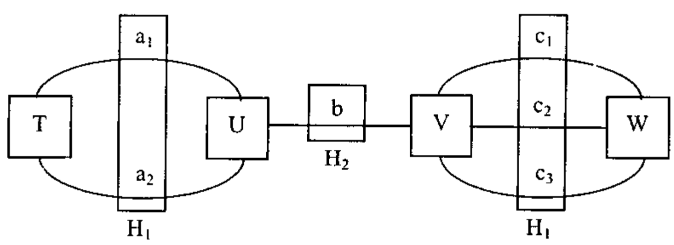
c. *menyusun himpunan-himpunan bagian yang memuat 2 elemen*

H = {1, 2, 3} → himpunan-himpunan bagian dari H yang memuat 2 elemen adalah {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}.

Maka ruang sampel S = {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}}, sehingga n(S) = 3.

Contoh tersebut di atas memberikan gambaran bagaimana menentukan ruang sampel dari suatu eksperimen kemudian dari data yang ada dapat ditentukan banyak anggota ruang sampelnya.

Ada suatu cara untuk menentukan banyaknya anggota ruang sampel dari suatu eksperimen tanpa harus mendata seluruh anggota ruang sampel itu. Cara itu dinamakan prinsip perkalian yang berasal dari perhitungan banyak anggota pada perkalian himpunan. Gambaran sederhananya adalah seperti berikut



H_1 = {a_1, a_2} adalah macam jalur jalan dari kota T ke U
H_2 = {b} adalah macam jalur jalan dari kota U ke V
H_3 = {c_1, c_2, c_3} adalah macam jalur jalan dari kota V ke W.

Macamnya jalur jalan yang dapat dilewati dari kota T ke kota W melewati kota U dan V adalah S = {a_1bc_1, a_1bc_2, a_1bc_3, a_2bc_1, a_2bc_2, a_2bc_3} = $H_1 \times H_2 \times H_3$.

Perhatikan bahwa banyaknya jalur yang dimaksud adalah $n(S) = 6 = 2 \times 1 \times 3 = n(H_1) \times n(H_2) \times n(H_3)$. Dengan gambaran tersebut kesimpulan yang diperoleh adalah:
Jika 2 adalah banyaknya jalur dari kota T ke U
1 adalah banyaknya jalur dari kota U ke V
3 adalah banyaknya jalur dari kota V ke W
Maka ada

$2 \times 1 \times 3$

jalur jalan yang dapat ditempuh dari kota P ke kota S melewati kota Q dan R.
Selanjutnya secara umum banyaknya anggota ruang sampel dalam suatu eksperimen mengacu pada prinsip perkalian adalah sebagai berikut.

Prinsip Perkalian

Jika n_1 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_1
n_2 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_2
n_3 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_3
⋮
n_r adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_r
Maka ada

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r$ cara

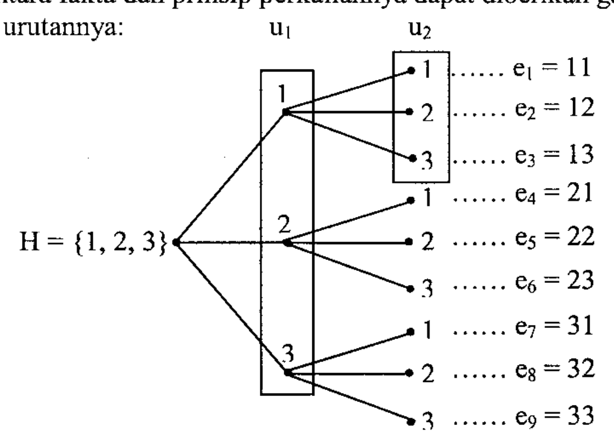
untuk mengambil semua keputusan.

Setelah mengenal prinsip perkalian ini, perhitungan ruang sampel untuk contoh sebelumnya, yaitu

Dari Obyek	Eksperimen
$H = \{1, 2, 3\} \rightarrow$	a) membuat nomor lotere terdiri dari 2 angka. b) menyusun bilangan-bilangan terdiri dari 2 angka yang saling berlainan. c) menyusun himpunan bagian yang beranggota 2 elemen.

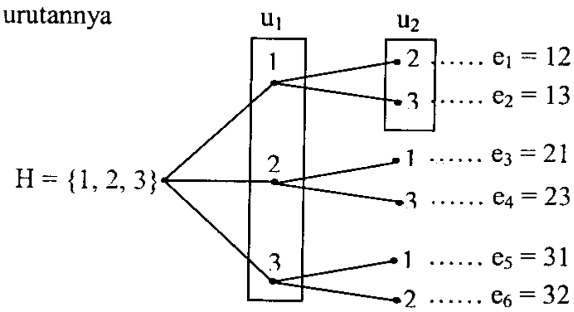
Antara fakta dan prinsip perkaliannya dapat diberikan gambaran seperti berikut.

a) urutannya:



Perhatikan bahwa $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_9\}$ dengan $n(S) = 9$. Hubungannya dengan prinsip perkalian adalah, nomor lotere urutan ke-1 dapat terjadi dalam 3 cara (cabang) sedangkan nomor lotere urutan ke-2 juga dapat terjadi dalam 3 cara (cabang). Sehingga banyaknya anggota ruang sampel dalam eksperimen itu adalah $n(S) = n(u_1) \times n(u_2) = 3 \times 3 = 9$.

b) urutannya



$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_6\}$, $n(S) = 6 = n(u_1) \times n(u_2) = 3 \times 2$.

c. untuk hal menyusun himpunan bagian dibahas pada topik kombinasi.

Perhatikan bahwa ruang sampel untuk ketiga eksperimen tersebut masing-masing adalah

a) $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_9\} = \{11, 12, 13, \ldots, 33\}$ dengan $n(S) = 9$
b) $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_6\} = \{12, 13, 21, \ldots, 32\}$ dengan $n(S) = 6$
c) $S = \{e_1, e_2, e_3\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ dengan $n(S) = 3$.

Contoh (a) pengulangan elemen obyek $H = \{1, 2, 3\}$ dimungkinkan muncul, misal seperti $e_1 = 11$ dan $e_9 = 33$ yaitu pada e_1, elemen $1 \in H$ diulang 2 kali sementara pada $e_9 = 33$, elemen $3 \in H$ diulang 3 kali.

Contoh (b) dan (c) pengulangan elemen obyek $H = \{1, 2, 3\}$ tidak dimungkinkan. Tetapi pada contoh b urutan elemen diperhatikan. Urutan elemen $e_1 = 12$ dibedakan dengan elemen $e_3 = 21$, sebab 12 = dua belas sementara 21 = dua puluh satu. Contoh c meskipun sama-sama pengulangan elemen H tidak dimungkinkan tetapi urutannya tidak diperhatikan (urutan tak punya makna) yakni penulisan himpunan seperti $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ dan seterusnya sehingga dari yang sama itu cukup diwakili oleh salah satu saja.

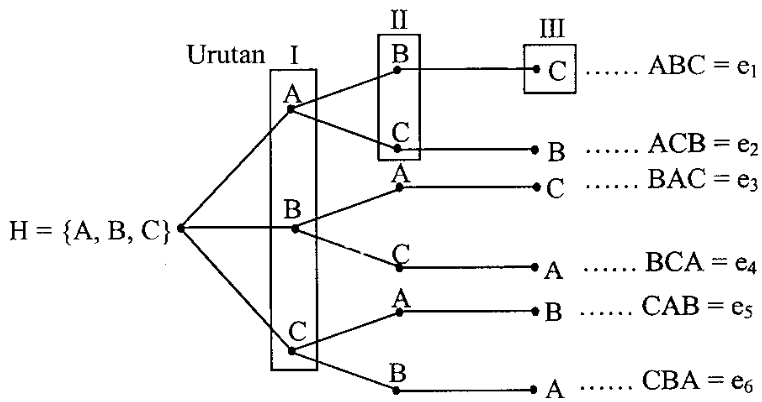
Kasus permutasi adalah eksperimen terhadap suatu obyek berupa himpunan H yang menghasilkan ruang sampel dimana titik-titik sampelnya tidak memungkinkan pengulangan elemen-elemen dalam H namun urutan elemen-elemen H pada setiap titik sampelnya diperhatikan.
Kasus kombinasi adalah eksperimen terhadap suatu obyek berupa himpunan H yang menghasilkan ruang sampel dimana titik-titik sampelnya juga tidak memungkinkan pengulangan elemen-elemen H tetapi urutan elemen H pada setiap titik sampelnya tidak diperhatikan.

C. PENURUNAN RUMUS PERMUTASI DAN KOMBINASI

1. Penurunan Rumus Permutasi

Misalkan ada 3 regu peserta tebak tepat tingkat SLTP akan bertanding di babak final yang menyediakan 3 macam kategori hadiah (hadiah I, II, dan III). Ada berapa cara hadiah itu dapat diberikan?

Jika A, B, dan C adalah obyek-obyek yang dimaksud, maka yang dimaksud sebagai obyek eksperimennya adalah H = {A, B, C}. Eksperimen yang dimaksud adalah melakukan lomba tebak tepat kepada ketiga regu tersebut. Ruang sampel dari eksperimen itu adalah himpunan semua hasil yang mungkin terjadi.
Gambarannya adalah sebagai berikut.



Perhatikan bahwa susunan elemen-elemen seperti ABC, ACB, ... hingga CBA masing-masing disebut permutasi.
Selanjutnya diperoleh ruang sampel S = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6} sehingga n(S) = 6.
Dilihat dari diagramnya,

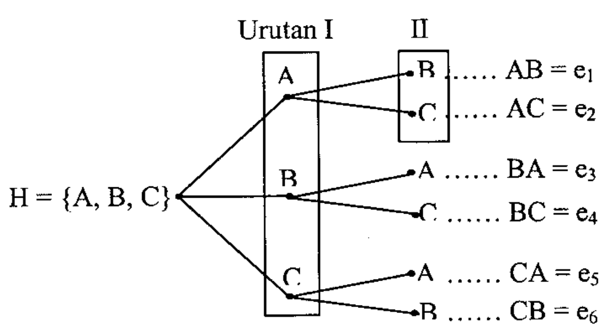
n(S) = n(urutan I) × n(urutan II) × n(urutan III)

= 3 cara × 2 cara × 1 cara = 3! = 6

= Banyaknya permutasi 3 hadiah dari 3 peserta

$= P_{3\text{hadiah}}^{3\text{peserta}} = P_3^3$

Apabila pesertanya 3 orang sementara hadiahnya hanya 2 macam (hadiah I dan hadiah II) maka gambaran ruang sampelnya adalah seperti berikut.



Ruang sampel S = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6} sehingga n(S) = 6.
Dilihat dari diagramnya,

$$n(S) = n(\text{urutan I}) \times n(\text{urutan II})$$
$$= 3 \text{ cara} \times 2 \text{ cara} = 3 \times 2 = 6$$
= banyaknya permutasi 2 hadiah dari 3 peserta
$$= P_{2\text{hadiah}}^{3\text{peserta}} = P_2^3$$. Lambang lain untuk P_2^3 adalah ${}_3P_2$ atau $P_{(3,2)}$.

Dari kedua contoh sederhana tersebut mudah dibayangkan bahwa apabila pesertanya 10 orang sementara hadiahnya 3 macam, maka banyaknya anggota ruang sampelnya adalah

$$n(S) = P_{3\text{hadiah}}^{10\text{peserta}} = P_3^{10}$$
$$= n(\text{urutan I}) \times n(\text{urutan II}) \times n(\text{urutan III})$$
$$= 10(\text{cara/cabang}) \times 9(\text{cara/cabang}) \times 8(\text{cara/cabang})$$
$$= 10 \times 9 \times 8$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \ldots \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{10!}{7!} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

Maka cara umum $\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$ dengan n! dibaca "n faktorial"

dan n! = n(n – 1)(n – 2) ... (2)(1).

Catatan

Secara konsep nol faktorial (0!) tidak ada, ttapi dalam setiap perhitungan yang melibatkan notasi faktorial, hasil perhitungan selalu benar sesuai konsep jika diberikan nilai 0! = 1. Agar tidak terjadi kontradiksi selanjutnya didefinisikan bahwa 0! = 1.

Contoh Perhitungan

Hitunglah: a. $P_3^{20} = \ldots$

b. $P_2^{100} = \ldots$

Jawab.

a. Dengan penalaran langsung, yaitu $n(u_1) = 20$, $n(u_2) = 19$, dan $n(u_3) = 18$. Maka $P_3^{20} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

Jika menggunakan rumus

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ maka } P_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{17!}}{\cancel{17!}} = 6840.$$

b. Dengan penalaran langsung diperoleh

P_2^{100} = n(urutan I) × n(urutan II) = 100 × 99 = 9900.

2. Penurunan Rumus Kombinasi

Misalkan dari 4 bersaudara Ali (A), Budi (B), Cahya (C), dan Doni (D) diundang 2 orang diantaranya untuk rapat keluarga. Ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi? Bagaimana pula jika yang diundang adalah 3 orang dari 4 bersaudara itu?

Dari permasalahan tersebut yang dimaksud dengan obyek eksperimennya adalah H = {A, B, C, D} sedangkan eksperimennya adalah mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 2 orang wakilnya. Sesudah itu eksperimennya diganti mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 3 orang wakilnya. Ruang sampel dari masing-masing eksperimen itu adalah himpunan dari semua elemen yang mungkin terjadi pada eksperimen itu. Penalaran selengkapnya adalah seperti berikut.

No.	Obyek Eksperimen	Cara Eksperimen	Hasil-hasil yang Mungkin
1.	{A, B, C, D}	mengundang 2 orang wakilnya untuk rapat keluarga	$AB = e_1$, $AC = e_2$, $AD = e_3$, $BC = e_4$, $BD = e_5$, $CD = e_6$ $\Big\}$ n(S) = 6
2.	{A, B, C, D}	mengundang 3 orang wakilnya untuk rapat keluarga	$ABC = e_1$, $ABD = e_2$, $ACD = e_3$, $BCD = e_4$ $\Big\}$ n(S) = 4

Rangkaian hasil-hasil eksperimen yang mungkin terjadi seperti misalnya AB, AC, AD pada contoh 1 disebut kombinasi 2 elemen dari 4 elemen. Sedangkan ABC, ABD, ACD pada contoh 2 disebut kombinasi 3 elemen dari 4 elemen. Banyaknya kombinasi adalah banyaknya semua rangkaian elemen-elemen dalam H yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu. Banyaknya kombinasi 2 elemen dari 4 elemen yang tersedia dilambangkan dengan C_2^4 atau $C_{(4,2)}$ atau ${}_4C_2$ atau $\binom{4}{2}$. Dari kedua contoh itu diperoleh $C_2^4 = 6$ dan $C_3^4 = 4$.

Selanjutnya dalam hubungannya dengan permutasi dan penggunaan notasi faktorial penurunan rumusnya dilakukan seperti berikut.

Untuk C_2^4 (Kombinasi 2 dari 4).

Macam Kombinasi	Jika Elemen-elemen Kombinasi itu dipermutasikan	Banyaknya Permutasi
$e_1 = AB$	AB, BA	2!
$e_2 = AC$	AC, CA	2!
$e_3 = AD$	AD, DA	2!
$e_4 = BC$	BC, CB	2!
$e_5 = BD$	BD, DB	2!
$e_6 = CD$	CD, DC	2!
$C_2^4 = 6$	$P_2^4 = \underbrace{4 \times 3}_{\text{2faktor}} = 12$	$6 \times 2!$

Untuk C_3^4 (Kombinasi 3 dari 4)

Macam	Jika Elemen-elemen Kombinasi itu	Banyaknya

Kombinasi	dipermutasikan	Permutasi
$e_1 = ABC$	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA	3!
$e_2 = ABD$	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA	3!
$e_3 = ACD$	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA	3!
$e_4 = BCD$	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB	3!
$C_3^4 = 4$	$P_3^4 = \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{3\text{faktor}} = 24$	$4 \times 3!$

Perhatikan bahwa

$P_2^4 = 4 \times 3 = 12 = 6 \times 2! = C_2^4 \times 2!$

$P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24 = 4 \times 3! = C_3^4 \times 3!$

Dengan pemikiran yang sama, ternyata secara umum berlaku bahwa:

$$P_r^n = C_r^n \times r! \text{ atau } \boxed{C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} \text{ atau } \boxed{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}}$$

Contoh Perhitungan.

Hitunglah: a. $C_3^{20} = \ldots$

b. $C_{17}^{20} = \ldots$

Jawab.

a. Karena selisih antara 3 dan 20 cukup jauh, maka rumus yang lebih praktis digunakan adalah

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} \text{ sehingga } C_3^{20} = \frac{P_3^{20}}{3!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

b. Karena 17 dan 20 berselisih relatif dekat, maka rumus yang lebih praktis digunakan adalah $C_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$, sehingga

$$C_{17}^{20} = \frac{20!}{(20-17)!17!} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{17!}}{6 \times \cancel{17!}} = 1140.$$

3. Segitiga Pascal

Segitiga Pascal ialah segitiga yang dibentuk oleh bilangan-bilangan yang bersesuaian dengan koefisien-koefisien pangkat bulat non negatif dari suatu suku dua (a + b). Dalam perkembangan lebih lanjut, ternyata bilangan-bilangan pada segitiga Pascal itu bersesuaian dengan bilangan-bilangan pada kombinasi.

Perhatikan lebih lanjut.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_1^3 & & C_3^3 & & \\
 & C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & \\
C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5
\end{array}$$

Dengan adanya kesesuaian itu maka perhitungan-perhitungan kombinasi yang hanya melibatkan bilangan-bilangan kecil langsung dapat dilakukan berdasarkan kesesuaiannya dengan bilangan yang ada pada segitiga Pascal.

Contoh.

Hitunglah k, jika $k = \dfrac{C_1^3.C_1^2}{C_2^5}$.

Jawab

Dengan melihat segitiga Pascal maka $k = \dfrac{C_1^3.C_1^2}{C_2^5} = \dfrac{3.2}{10} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

=

Ringkasan

Eksperimen acak sebanyak r elemen dari himpunan $H = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$

Pengulangan elemen H dimungkinkan

$n(S) = n \times n \times \ldots \times n = n^r$

Pengulangan elemen H tidak dimungkinkan

Urutan diperhatikan (Permutasi)

$n(S) = P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

Urutan tak diperhatikan (Kombinasi)

$n(S) = C_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

Latihan 2

1. Hitunglah

   a. P_3^{10} d. C_3^{20}

   b. C_4^{10} e. P_2^{100}

   c. P_3^{20} f. C_3^{100}

2. Pada suatu arisan yang diikuti oleh 20 orang akan diundi sehingga 3 diantara anggotanya berhak menerima hadiah (dinyatakan putus arisan). Ada berapa cara yang mungkin terjadi atas ketiga pemenang arisan itu jika
   a. Nilai hadiahnya tidak sama
   b. Nilai hadiahnya sama
   c. Samakah antara a dan b berikan alasannya.

3. Dari angka-angka dasar 0, 1, 2, ..., 9 ada berapa cara kita dapat menulis bilangan yang terdiri dari
   a. 3 angka c. 3 angka yang saling berlainan
   b. 4 angka d. 4 angka yang saling berlainan

4. a. Dari 4 orang bersaudara A(Ali), B(Budi), C(Cahya), dan D(Doni) diundang 3 orang wakilnya untuk mengikuti rapat keluarga. Tuliskan ruang sampelnya (himpunan tiga orang - tiga orang yang mungkin dapat hadir memenuhi undangan itu). Dari ruang sampel itu ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi.
   b. Tanpa menulis ruang sampelnya, ada berapa cara undangan dari panitia kepada 2 orang sebagai wakil dari satu kelas yang berjumlah 40 orang dapat dipenuhi?

5. a. Jika dalam 1 ruang pertunjukkan tinggal tersisa 5 kursi kosong sementara yang terakhir masuk ada 9 orang, ada berapa cara kelima kursi kosong itu dapat diduduki oleh kesembilan orang yang berhak duduk itu?
   b. Bagaimana halnya dengan jika kursi kosongnya ada 9 sementara yang akan mendudukinya 5 orang. Ada berapa cara kesembilan kursi kosong itu dapat diduduki?

   Petunjuk: Cobalah menggunakan bilangan yang lebih kecil misal 3 dan 2 atau sebaliknya, tentukan ruang sampelnya dan amati elemen-elemennya apakah termasuk pengulangan dimungkinkan, ataukah permutasi, ataukah kombinasi. Dari situ kita dapat menerapkannya untuk bilangan yang lebih besar.

6. a. Ada berapa cara kita dapat menuliskan bilangan bulat positip yang tediri atas 3 angka? Bagaimana halnya kalau 5 angka?
   b. Ada berapa cara kita dapat menuliskan bilangan bulat positip yang terdiri atas 3 angka yang saling berlainan? Bagaimana halnya kalau 5 angka saling berlainan?
   c. Ada berapa cara nomor telepon lokal (terdiri atas 6 digit/angka) dapat disediakan? Ingat telepon lokal angka pertamanya tidak boleh nol!
   d. Bagaimana halnya dengan nomor kendaraan yang terdiri dari 4 angka?

LAMPIRAN

Kunci Latihan 1 halaman 7

1. a. {A1, A2, …, A6, G1, G2, …, GG}, n(S) = 12.
   b. {1, 1), (1, 2), (1, 3), …, (6, 5), (6, 6)} = {e_1, e_2, e_3, …, e_{35}, e_{36}}, n(S) = 36.
   c. {MM, MT, TM, TT}, n(S) = 4 dengan M = miring dan T = terlentang.
   d. {AM, AT, GM, GT}, n(S) = 4 dengan A = angka, G = gambar, M = miring, T = terlentang.
   e. {T1, T2, …, T6, M1, M2, …, M6}, n(S) = 12
2. a. {m_1, m_2, p_1}, n(S) = 3
   b. {m_1m_2, m_1p_1, m_2p_1}, n(S) = 3
   c. {$m_1m_2p_1$}, n(S) = 1
3. a. {m_1, m_2, p_1, p_2}, n(S) = 4
   b. {m_1m_2, m_1p_1, m_1p_2, m_2p_1, m_2p_2, p_1p_2}, n(S) = 6
   c. {$m_1m_2p_1$, $m_1m_2p_2$, $m_1p_1p_2$, $m_2p_1p_2$}, n(S) = 4

Kunci Latihan 2 halaman 19

1. a. $10 \times 9 \times 8 = 720$ d. 1.140
   b. 210 e. 9.900
   c. 6.840 f. 161.700
2. a. $P_3^{20} = 6.840$
   b. $C_3^{20} = 1.140$
   c. tidak sama
3. a. 900 c. 648
   b. 9.000 d. 4.536
4. a. {ABC, ABD, ACD, BCD}, ada 4 cara
   b. 780 cara
5. a. 126 cara
   b. 126 cara
6. a. 900 cara, 90.000 cara c. 900.000 cara
   b. $9 \times 9 \times 8 = 648$ cara, 27.216 d. 9.000 cara

Kunci Latihan 3 halaman 33 dan 34

1. a. bebas
   b. tak bebas
   c. A = peristiwa munculnya mata dadu antara 2 dan 5, B = peristiwa munculnya muka gambar, C = peristiwa munculnya muka 6 dan muka dadu kurang dari 6.
   d. saling bebas jika peristiwa yang satu hanya berbicara masalah obyek pertama saja dan peristiwa yang kedua hanya berbicara masalah obyek kedua saja.
2. a. bebas
   b. tak bebas
   c. D = peristiwa munculnya muka dadu 3 atau 4, E = peristiwa munculnya pines miring, dan F = peristiwa munculnya pines miring dan muka dadu antara 1 dan 6.

d. berlaku

3. a. lepas
   b. komplemen
   c. bebas
   d. tak bebas

Kunci Latihan 4 halaman 36 dan 37

1. a. 0,7
   b. 0
   c. 0,8
2. a. 0,5
   b. 0,7
   c. 0,9
3. 0,2
4. a. 0,7
   b. 0,9
   c. 0,35
5. a. 0,5
   b. 0,9
   c. 0,4
   d. 0
   e. 0,2
   f. 0,7
6. a. Karena $P(A \cap B) = P(A) \times P(A) \times (P(B)$, hasil keduanya $= \frac{1}{4}$.
   b. Karena $P(C \cap D) \neq P(C) \times P(D)$.
7. a. 0,3
   b. 0,6

Kunci Latihan 5 halaman 42 dan 43

1. a. $\frac{2}{3}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. $\frac{4}{9}$, jawaban a dan b sama
2. a. $\frac{1}{4}$
   b. $\frac{1}{4}$
   c. $\frac{3}{25}$, ya
3. a. $\frac{13}{34}$
   b. $\frac{13}{34}$
   c. $\frac{3}{8}$, ya

4. a. $\frac{117}{850}$

   b. $\frac{117}{850}$

   c. $\frac{9}{64}$

Kunci Latihan 6 halaman 46

1. $\frac{11}{36}$

2. n(S) = 1.296 = n(0 sukses) + n(1 sukses) + n(2 sukses) + … + n(4 sukses)
   = 625 + 500 + 150 + 20 + 1

   a. $\frac{150}{1.296}$

   b. $\frac{1.275}{1.296}$

   c. yang diuntungkan petaruhnya

3. a. 8

   b. $P(\{e_1\}) = P(\{TTT\}) = 0{,}343$, $P(\{e_2\}) = P(\{TTM\}) = 0{,}147$
   $P(\{e_3\}) = P(\{TMT\}) = 0{,}147$, $P(\{e_4\}) = P(\{TMM\}) = 0{,}063$
   $P(\{e_5\}) = P(\{MTT\}) = 0{,}147$, $P(\{e_6\}) = P(\{MTM\}) = 0{,}063$
   $P(\{e_7\}) = P(\{MMT\}) = 0{,}063$, $P(\{e_8\}) = P(\{MMM\}) = 0{,}027$

   c. 0,441

   d. 0,216

4. a. 8, ya

   b. $\frac{3}{8}$

   c. $\frac{4}{8}$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H – Kolman, B. (1982). ***Applied Finite Mathematics (3rd Edition)***. Anton Textbooks, Inc: New York.

Depdikbud. (1996). ***Garis-garis Besar Program Pengajaran Matematika (GBPP) Matematika SLTP Kurikulum Pendidikan Dasar 1994.*** Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.

Depdiknas. (2001). ***Pola Pelaksanaan Broad Based Education (BBE)***. Buku II. Departemen Pendidikan Nasional: Jakarta.

Harnet, Donald L. (1982). ***Statistical Methods (3rd Edition)***. Addison – Wesley Publishing Company, Inc: Philiphines.

Smith, Gary. (1991). ***Statistical Reasoning (3rd Edition)***. Allyn and Bacon, A Division of Simon and Schuster Inc: 160 Gould Street, Needham Height, Massachusetts 02194.

Spiegel, Murary B. (1982). ***Probability and Statistics (Theory and Problem)***. Mc Graw – Hill Book Company: Singapore.