PELUANG

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA
Jenjang Dasar
Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika

Oleh:
Drs. MARSUDI RAHARJO, M.Sc.Ed.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

===

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR DIAGRAM

DAFTAR TABEL

PELUANG

Drs. Marsudi Raharjo, M.Sc.Ed.

I. PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Peluang merupakan bagian matematika yang membahas tentang ukuran ketidakpastian terjadinya suatu peristiwa yang ada dalam kehidupan (Smith, 1991:3). Memang banyak peristiwa yang tidak dapat dipastikan terjadi atau tidak terjadi di kemudian waktu. Namun dengan mengetahui ukuran berhasil dan tidaknya suatu peristiwa yang diharapkan akan terjadi kemudian orang lebih dapat mengambil keputusan terbaik dan bijaksana tentang apa yang seharusnya ia lakukan.

Materi peluang secara sederhana mulai dikenalkan di SMP lebih diperdalam di SMA dan ditingkatkan lagi di perguruan tinggi. Namun dari hasil tes penguasaan guru selama ini (SMP dan SMA) ternyata untuk peluang masih sangat kurang. Mungkin guru kurang minat mempelajari atau mungkin kesulitan mendapatkan buku-buku rujukan atau mungkin buku-buku rujukan yang dipelajarinya selama ini belum cukup memberikan benang merah yang cukup untuk menghayati materi itu (materi yang seharusnya dikuasai guru) sepenuhnya.

Melalui kesempatan ini penulis berupaya memberikan tuntunan pemahaman materi peluang minimal yang harus dikuasai guru SMA atas dasar paradigma pemberian kecakapan hidup (life skill) yang bersifat akademik menggunakan prinsip *learning to know, learning to do, learning to be, learning to live together dan learning to cooperate* (Depdiknas, 2001:11). Diharapkan para pembaca (guru matematika SMA) dalam memahami makalah ini bekerjasama dengan teman-teman seprofesi: saling membaca, mencoba soal, berdiskusi dan mengadakan konfirmasi (menyampaikan argumentasi/alasan pemecahan masalahnya).

B. TUJUAN

Bahan ajar ini ditulis sebagai bahan rujukan pelatihan di LPMP–LPMP seluruh Indonesia dengan maksud untuk memberikan bahan pemahaman pendalaman materi peluang minimal yang harus dikuasai guru matematika SMA agar lebih berhasil dalam mengajarkan materi itu kepada para siswanya. Kepada para alumni penataran guru inti MGMP matematika SMA diharapkan untuk menggunakannya sebagai bahan tindak lanjut penataran dengan paradigma baru sesuai anjuran pemerintah saat ini. Setelah dipelajarinya materi ini diharapkan agar para alumni dapat:

1. mengimbaskan pengetahuannya kepada guru-guru di wilayah MGMP-nya dan rekan-rekan seprofesi lainnya
2. mengajarkan kepada para siswanya secara lancar, lebih baik dan lebih jelas
3. mengembangkan soal-soal yang lebih variatif dan menyentuh kehidupan nyata.

C. RUANG LINGKUP

Materi peluang yang ditulis ini merupakan materi minimal yang harus dikuasai oleh guru SMA. Materi yang dibahas meliputi:

1. Konsep ruang sampel dari suatu eksperimen (percobaan acak), teknik penulisan, dan teknik perhitungan banyak anggotanya termasuk permutasi dan kombinasi, permutasi dengan beberapa unsur sama serta permutasi siklis.
2. Konsep peluang, kepastian dan kemustahilan, frekuensi harapan, relasi antar peristiwa, teorema dasar peluang, cara pengambilan sampel dan teknik perhitungannya, dan terakhir adalah pengundian sekaligus dan pengundian berulang.

Bahan ajar ini dirancang seperti modul, dapat dibaca dan dipahami sendiri termasuk mengerjakan soal-soal latihan dan merujuknya pada kunci jawaban. Untuk itu langkah-langkah penguasaan materinya adalah

1. Pelajari materinya (bersama teman)
2. Bahas soal-soalnya dan lihat kunci jawabannya.
3. Adakan Problem Posing: Ciptakan variasi soal lainnya berikut jawabannya.

D. KOMPETENSI YANG DIHARAPKAN

Setelah mengikuti Diklat dengan bahan ajar ini, peserta Diklat diharapkan memiliki kemampuan untuk

1. Menyebutkan syarat dapat diadakannya suatu eksperimen, yakni adanya obyek eksperimen.
2. Memberikan batasan tentang ruang sampel, titik sampel, peristiwa, dan peristiwa elementer dalam suatu eksperimen.
3. Mengidentifikasi hasil eksperimen yang mungkin terhadap obyek eksperimen H apakah hasil eksperimennya memungkinkan adanya pengulangan elemen H atau tidak, jika tidak apakah hasil eksperimennya merupakan permutasi atau kombinasi.
4. Menggunakan prinsip perkalian, rumus permutasi, atau kombinasi untuk menentukan banyaknya semua hasil yang mungkin dalam suatu eksperimen.
5. Menggunakan rumus permutasi dengan beberapa unsur sama dan permutasi siklis pada permasalahan yang relevan.
6. Menentukan peluang suatu kejadian berdasarkan definisi klasik atau empirik.
7. Menentukan relasi antara dua peristiwa (lepas, bebas, komplemen, tak bebas) dalam suatu eksperimen.
8. Menentukan peluang munculnya peristiwa tertentu dalam berbagai cara pengambilan sampel.
9. Menentukan peluang munculnya peristiwa tertentu dalam pengundian beberapa obyek sekaligus atau dalam pengundian 1 obyek yang dilakukan beberapa kali.

E. KUNCI JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

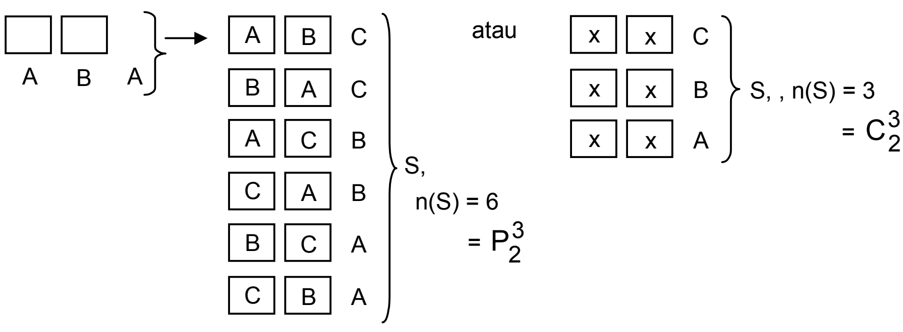
Latihan 1 halaman 15

1. 900.000
2. 119.232.000
3. a. $9 \times 8 \times 7 \times 6 + 4 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 13.776$ b. 68.880
   c. 1.653.120 d. 1.653.120 e. tak mungkin
4. a. $5 \times 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 13.440$ b. 67.200
   c. 1.612.800 d. 1.612.800 e. tak mungkin
5. 24

Latihan 2 halaman 22

1. a. 720 d. 1.140
   b. 120 e. 99.000
   c. 6.840 f. 1.617

2. a. $P_3^{20} = 6.840$ b. $C_3^{20} = 1.140$
   c. Kalau hadiahnya tidak sama maka urutan ABC artinya A mendapat hadiah I, B mendapat hadiah II, dan C mendapat hadiah ketiga. Dengan begitu maka hasil seperti ABC $\neq$ BCA $\neq$ CBA dan lain-lain (kasus permutasi). Jika hadiahnya sama maka pemenang ABC artinya A mendapat hadiah x rupiah, B juga x rupiah, C juga x rupiah sehingga hasil seperti ABC = BCA = CAB dan lain-lain (kasus kombinasi).
3. a. 900 b. 9.000 c. $9 \times 8 + 9 \times (8 \times 8) = 648$
   d. $9 \times 8 \times 7 + 9 \times (8 \times 8 \times 7) = 4.536$
4. a. S = {e_1, e_2, e_3, e_4} dengan e_1 = ABC, e_2 = ABD, e_3 = ACD, dan e_4 = BCD
   n(S) = 4, artinya undangan dapat dipenuhi dalam 4 cara.
   b. 780
5. a. 15.120 jika urutan cara duduknya diperhatikan dan 126 jika urutan cara duduknya tak diperhatikan. Berikut diberikan ilustrasi untuk 2 kursi kosong yang hendak diduduki oleh 3 orang, sebut saja namanya A, B dan C. Anda dapat mencobanya ilustrasi untuk 3 kursi kosong yang dapat diduduki oleh 2 orang A dan B.



Kesimpulannya jika urutan cara duduknya diperhatikan maka eksperimennya merupakan kasus permutasi, sedang jika urutan cara duduknya tidak diperhatikan maka eksperimennya merupakan kasus kombinasi.

b. 1.520 jika urutan cara duduknya diperhatikan, atau
126 jika urutan cara duduknya tak diperhatikan.

6. a. 900 ; 90.000 b. 504 ; 15.120 c. 900.000 d. 9.000

Latihan 3 halaman 28

1. a. 151.200 b. 12 c. 12 d. 30.240
2. a. 21 b. 6 c. 5 d. 4
3. 720
4. n(S) = $C_4^{10} = 210$
5. n(S) = $P_3^{10} = 720$
6. Ilustrasi untuk 5 orang penari A, B, C, D, E dengan 3 orang akan menari di hotel A dan 2 orang akan menari di hotel B.

$$\left.\begin{array}{ll}
\boxed{\text{ABC}} - \boxed{\text{DE}} & \ldots \text{ABC.DE}\ldots\ e_1 \\
\boxed{\text{ABD}} - \boxed{\text{CE}} & \ldots \text{ABD.CE} \ldots\ e_2 \\
\boxed{\text{ABE}} - \boxed{\text{CD}} & \ldots \text{ABE.CD} \ldots\ e_3 \\
\boxed{\text{ACD}} - \boxed{\text{BE}} & \ldots \text{ACD.BE} \ldots\ e_4 \\
\boxed{\text{ACE}} - \boxed{\text{BD}} & \ldots \text{ACE.BD} \ldots\ e_5 \\
\boxed{\text{ADE}} - \boxed{\text{BC}} & \ldots \text{ADE.BC} \ldots\ e_6 \\
\boxed{\text{BCD}} - \boxed{\text{AE}} & \ldots \text{BCD.AE} \ldots\ e_7 \\
\boxed{\text{BCE}} - \boxed{\text{AD}} & \ldots \text{BCE.AD} \ldots\ e_8 \\
\boxed{\text{BDE}} - \boxed{\text{AC}} & \ldots \text{BDE.AC} \ldots\ e_9 \\
\boxed{\text{CDE}} - \boxed{\text{AB}} & \ldots \text{CDE.AB} \ldots\ e_{10}
\end{array}\right\} S$$

$$\begin{aligned} n(S) &= C_3^5.C_2^{\text{sisanya}} \\ &= 10.C_2^2 \\ &= 10.1 = 10 \end{aligned}$$

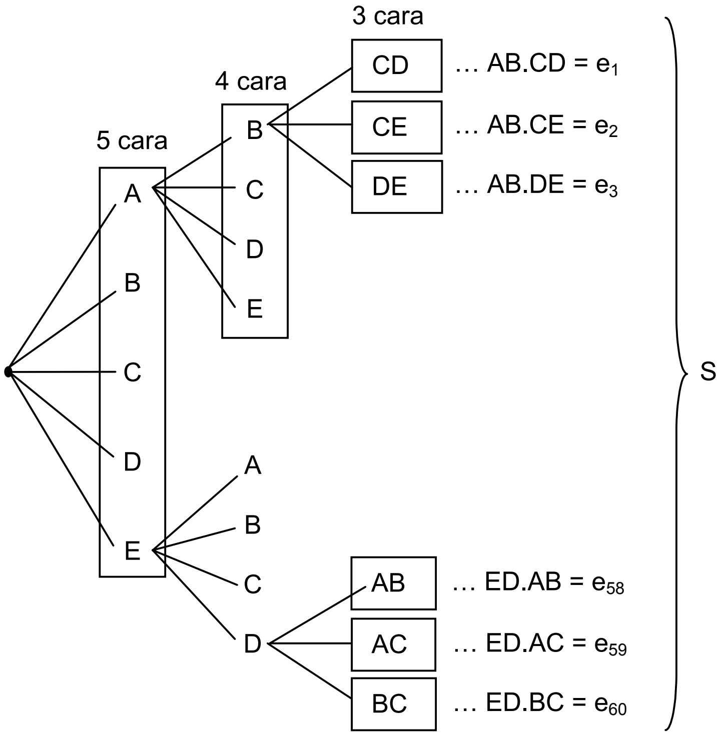
20 penari

5 di hotel A, 7 di hotel B $\Rightarrow$ n(S) = $C_5^{20}.C_7^{15}$

$= 99.768.240$

$= C_7^{20}.C_5^{13}$

7.



$n(S) = \underbrace{n(u_1).n(u_2)}.n(u_3)$ dengan $n(u_1)\ .\ n(u_2) = P_2^5$ dan $n(u_3) = C_2^{5-2}$

$= P_2^5 \quad . \quad C_2^{sisanya}$

$= P_2^5.C_2^3 = 5.4.3 = 60$

8. $n(S) = P_2^{100}.C_4^{98}.C_{10}^{94}, n(S) = P_1^{200}.C_3^{199}.C_4^{196}.C_{10}^{192}$

Latihan 4 halaman 38

1. a. bebas b. tak bebas

   c. A = peristiwa munculnya muka dadu 3 atau 4

   B = peristiwa munculnya muka G (gambar) pada mata uang logam

   C = peristiwa munculnya muka dadu maksimal 5 dan muka G pada mata uang logam.

d. saling bebas jika peristiwa pertama A hanya mensyaratkan munculnya salah satu obyek (dalam hal ini obyek pada dadu saja) dan peristiwa B hanya mensyaratkan munculnya obyek yang lain (dalam hal ini obyek pada mata uang logam saja).

2. a. bebas b. tak bebas
   c. D = peristiwa munculnya muka dadu 3 atau 4
   E = peristiwa munculnya hasil miring pada fines
   F = peristiwa munculnya hasil miring pada fines dan munculnya muka dadu antara 1 dan 6.
   d. berlaku
3. a. lepas b. komplemen c. bebas d. tak bebas

Latihan 5 halaman 40

1. a. 0,7 b. 0 c. 0,8
2. a. 0,5 b. 0,7 c. 0,9
3. a. 0,2
4. a. 0,70 b. 0,90 c. 0,35
5. a. 0,5 b. 0,9 c. 0,4 d. 0 e. 0,2 f. 0,7
6. –
7. a. 0,3 b. 0,6

Latihan 6 halaman 46

1. a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{4}{9}$
2. a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{4}$ c. $\frac{9}{50}$
3. a. $\frac{13}{34}$ b. $\frac{13}{34}$ c. $\frac{39}{104}$
4. a. $\frac{117}{850}$ b. $\frac{117}{850}$ c. $\frac{9}{64}$

Latihan 7 halaman 48

1. a. $P\underbrace{(1m, 2p, 2k)}_{5\text{ bola}} = \frac{C_{1m}^{4m}.C_{2p}^{5p}.C_{2k}^{6k}}{C_{5\text{ bola}}^{15\text{bola}}} = \frac{C_1^4.C_2^5.C_2^6}{C_5^{15}} = \frac{200}{1001}$

b. $\underbrace{P(1m, 2p, 2k)}_{5\text{ bola}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{banyaknya}\\ \text{cabang}\end{array}} \times \boxed{\text{nilai peluang masing - masing cabang}}$

$= \dfrac{5!}{1!\,2!\,2!} \times \boxed{\text{nilai peluang cabang yang pertama}}$

$= \dfrac{5!}{1!\,2!\,2!} \cdot \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{5}{14} \cdot \dfrac{4}{13} \cdot \dfrac{6}{12} \cdot \dfrac{5}{11} = \dfrac{200}{1001}$

c. $P(1m, 2p, 2k) = \dfrac{(1+2+2)!}{1!\,2!\,2!} \cdot \dfrac{4}{15} \cdot \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{6}{15} \cdot \dfrac{6}{15} = \dfrac{32}{225}$

2. a. $P(2p, 2k) = P(0m, 2p, 2k) = \dfrac{C_0^4 . C_2^5 . C_2^6}{C_4^{15}} = \dfrac{10}{91}$

b. $P(2p, 2k) = \dfrac{(2+2)!}{2!\,2!} \cdot \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{4}{14} \cdot \dfrac{6}{13} \cdot \dfrac{5}{12} = \dfrac{10}{91}$

c. $P(2p, 2k) = \dfrac{(2+2)!}{2!\,2!} \cdot \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{6}{15} \cdot \dfrac{6}{15} = \dfrac{8}{75}$

3. a. P(minimal 1p) = P(1p) + P(2p) + P(3p) = 1 – P(0p) = $\dfrac{41}{55}$

b. $\dfrac{41}{55}$ c. $\dfrac{19}{27}$

4. $\dfrac{3}{35}$

5. $\dfrac{4}{667}$

Latihan 8 halaman 51

1. $\dfrac{11}{36}$

2. n(S) = 1.296 = n(0 sukses) + n(1 sukses) + n(2 sukses) + … + n(4 sukses)

= 625 + 500 + 150 + 20 + 1

a. $\dfrac{150}{1.296}$

b. $\dfrac{1.275}{1.296}$

c. yang diuntungkan petaruhnya

3. a. 8

   b. $P(\{e_1\}) = P(\{TTT\}) = 0{,}343$, $P(\{e_2\}) = P(\{TTM\}) = 0{,}147$

   $P(\{e_3\}) = P(\{TMT\}) = 0{,}147$, $P(\{e_4\}) = P(\{TMM\}) = 0{,}063$

   $P(\{e_5\}) = P(\{MTT\}) = 0{,}147$, $P(\{e_6\}) = P(\{MTM\}) = 0{,}063$

   $P(\{e_7\}) = P(\{MMT\}) = 0{,}063$, $P(\{e_8\}) = P(\{MMM\}) = 0{,}027$

   c. 0,441

   d. 0,216

4. a. 8, ya

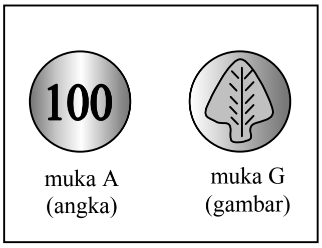
   b. $\frac{3}{8}$

   c. $\frac{4}{8}$

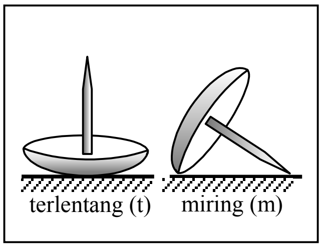
II. KOMBINATORIK

A. RUANG SAMPEL DAN PERISTIWA/KEJADIAN

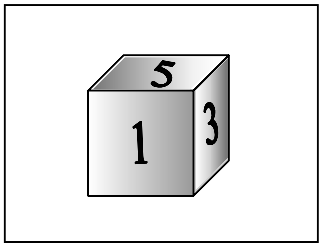
Misalkan kita mengadakan eksperimen melambungkan sekeping mata uang, melambungkan sebuah paku payung (fines) dan melambungkan sebuah dadu masing-masing satu kali. Hasil-hasil yang mungkin terjadi adalah: (1) untuk mata uang muka A (angka) atau muka G (gambar), (2) untuk paku fines posisi terlentang atau posisi miring, sedangkan (3) untuk dadu adalah mata 1, 2, 3, 4, 5, atau mata 6 (lihat gambar).



Gb.1.1

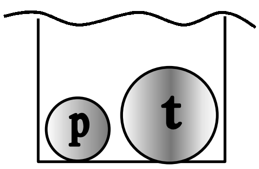


Gb.1.2



Gb.1.3

Sekarang misalkan kita melakukan eksperimen berupa pengambilan sebuah bola dari kaleng terbuka berbentuk tabung yang ditutup kain dan berisi sebuah bola pingpong (p) dan sebuah bola tenis (t).



Gb.2

Jika Anda adalah pelaku eksperimen, sementara teman Anda diminta menebak apa yang akan terambil nantinya pada percobaan (eksperimen) yang Anda lakukan itu. Jawabannya tentu akan tergantung dari apa yang akan Anda lakukan. Mungkin jika teman Anda menebak bola tenis (t), Anda akan mengambil bola yang kecil (p). Sementara jika teman Anda menebak bola yang kecil/bola pingpong (p), Anda akan mengambil bola yang besar/bola tenis (t). Dengan begitu hasil yang akan terjadi tergantung Anda yang akan mengaturnya. Eksperimen semacam ini *tidaklah fair* (tidak adil/jujur) sebab si pelaku eksperimen dapat mengatur hasil eksperimennya.

> Suatu eksperimen disebut fair (adil/jujur) apabila pelaku eksperimen tidak dapat mengatur hasil eksperimennya.

Dengan demikian jelas bahwa agar eksperimen bersifat fair maka tindakan terhadap obyek-obyek eksperimennya harus diperlakukan secara acak (random). Sehingga si pelaku eksperimen tidak dapat mengatur hasil eksperimennya. Eksperimen-eksperimen yang fair seperti itulah yang akan dibahas lebih lanjut dalam pokok bahasan peluang.

Suatu hal yang perlu diperhatikan adalah bahwa untuk melakukan suatu eksperimen ada 2 (dua) hal yang harus ada. Kedua hal tersebut adalah (1) obyek eksperimen dan (2) cara melakukan eksperimen terhadap obyek eksperimen itu. Lebih lanjut apabila obyek eksperimennya ada dan eksperimen yang dilakukannya fair, maka:

1. Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dalam eksperimen itu
2. Titik sampel adalah setiap hasil yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu
3. Peristiwa/kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel yang diperoleh dalam eksperimen itu
4. Peristiwa elementer adalah peristiwa yang hanya memuat tepat satu titik sampel.

Contoh 1

Dari himpunan H = {1, 2, 3, 4, 5} dilakukan eksperimen menyusun nomor undian terdiri dari 3 angka.

a. Jika S adalah ruang sampel dari eksperimen itu, tentukan S dan banyaknya anggota S yakni n(S) = ….
b. Jika A adalah peristiwa munculnya nomor undian ganjil, tentukan A dan banyaknya anggota A.
c. Jika B adalah peristiwa munculnya nomor undian genap, tentukan B dan banyaknya anggota B.

Jawab

a. Jika S adalah ruang sampel dalam eksperimen itu maka H = {1, 2, 3, 4, 5} adalah himpunan dari obyek eksperiman yang dimaksud. Untuk memudahkan cara memperoleh hasil-hasil eksperimen yang mungkin, kedudukan obyek eksperimen H dan ruang sampel S dapat dilihat melalui gambaran diagram pohon seperti berikut.

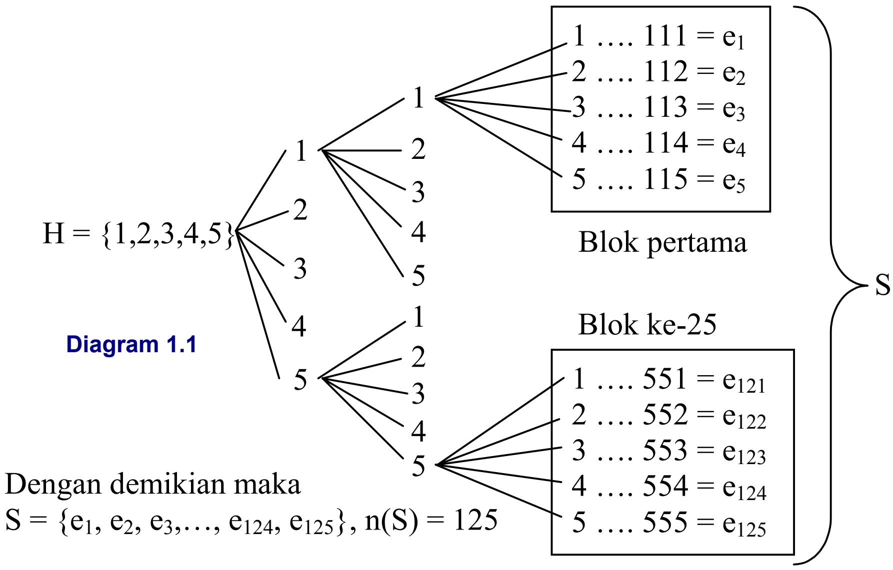


Diagram 1.1

b. A adalah peristiwa munculnya nomor undian ganjil, maka yang dimaksud adalah nomor undian yang akhirannya 1, 3, atau 5. Dengan begitu maka A = {e_1, e_3, e_5, …, e_{121}, e_{123}, e_{125}}. Selidiki dengan cermat bahwa n(A) = 25 $\times$ 3 = 75. Sebab disitu ada 25 blok, sementara tiap bloknya memuat nomor undian ganjil sebanyak 3.

c. B = {e_2, e_4, …, e_{122}, e_{124}} dengan n(B) = 25 $\times$ 2 = 50. Sebab disitu ada 25 blok, sementara tiap bloknya memuat nomor undian genap sebanyak 2.

Catatan

Perhatikan bahwa semua hasil eksperimen yang ditunjukkan oleh elemen-elemen e_1, e_2,… hingga elemen e_{125} memungkinkan pengulangan elemen H (H adalah obyek eksperimennya). Sebagai contoh misalnya e_1 = 111, elemen 1 $\in$ H diulang 3 kali. Contoh lainnya misal e_{121} = 551, elemen 5 $\in$ H diulang 2 kali.

Contoh 2

Dari himpunan H = {1, 2, 3, 4, 5} dilakukan eksperimen menyusun nomor undian berupa bilangan 3 angka yang angka-angkanya saling berlainan.

a. Tentukan ruang sampelnya dan banyaknya anggota ruang sampel itu.

b. Jika A adalah peristiwa munculnya nomor undian ganjil, tentukan A dan banyaknya anggota A.

c. Jika B adalah peristiwa munculnya nomor undian genap tentukan B dan banyaknya anggota B.

Jawab

a. Karena angka-angka dari bilangan 3 angka itu harus berlainan, maka gambaran diagramnya (ada perbedaan hasil dibandingkan contoh 1) adalah seperti berikut.

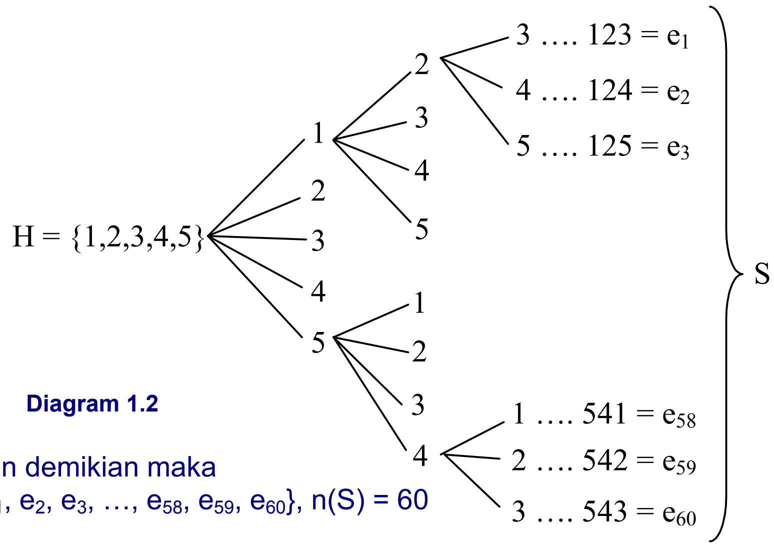


Diagram 1.2

Dengan demikian maka
S = {e_1, e_2, e_3, …, e_{58}, e_{59}, e_{60}}, n(S) = 60

b. A = peristiwa munculnya nomor undian ganjil, maka

A = {e_1, e_3, …, e_{58}, e_{60}}. Selanjutnya selidiki bahwa n(A) = n (ganjil yang angka pertamanya 1) + n (ganjil yang angka pertamanya 2) + … + n (ganjil yang angka pertamanya 5)

= 6 + 9 + 6 + 9 + 6 = 36.

c. B = peristiwa munculnya nomor undian genap, maka

B = {e_2, e_5, e_7, …, e_{59}}. Selanjutnya

n(B) = n (genap yang angka pertamanya 1) + n (genap yang angka pertamnya 2) + … + n (genap yang angka pertamanya 5).

= 6 + 3 + 6 + 3 + 6 = 24

= n(S) – n(A) = 60 – 36 = 24.

Catatan

Perhatikan bahwa semua hasil eksperimen yang ditunjukkan oleh elemen-elemen e_1, e_2,… hingga elemen e_{60} <u>tidak memungkinkan pengulangan elemen H</u> (H adalah obyek eksperimennya). Amati bahwa dari e_1, e_2,… hingga elemen e_{60} tidak ada *yang mengandung pengulangan elemen H, tetapi urutan elemennya dalam H diperhatikan. Artinya hasil seperti 125 dibedakan dengan hasil seperti 521 atau 215 dan lain-lain, yakni 125 ≠ 521 ≠ 215.*

Contoh 3

Dari 5 bola seukuran bernomor 1 , 2 , 3 , 4 , 5 dilakukan eksperimen mengambil secara acak 3 bola sekaligus. Tentukan ruang sampelnya dan kemudian berapa banyak anggota ruang sampel itu.

Jawab

Obyek eksperimen yang dimaksud pada contoh ini adalah
H = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 } sedang eksperimennya adalah mengambil acak 3 bola sekaligus. Gambaran selengkapnya dari eksperimen serta hasil-hasil yang mungkin terjadi oleh eksperimen itu adalah seperti berikut.

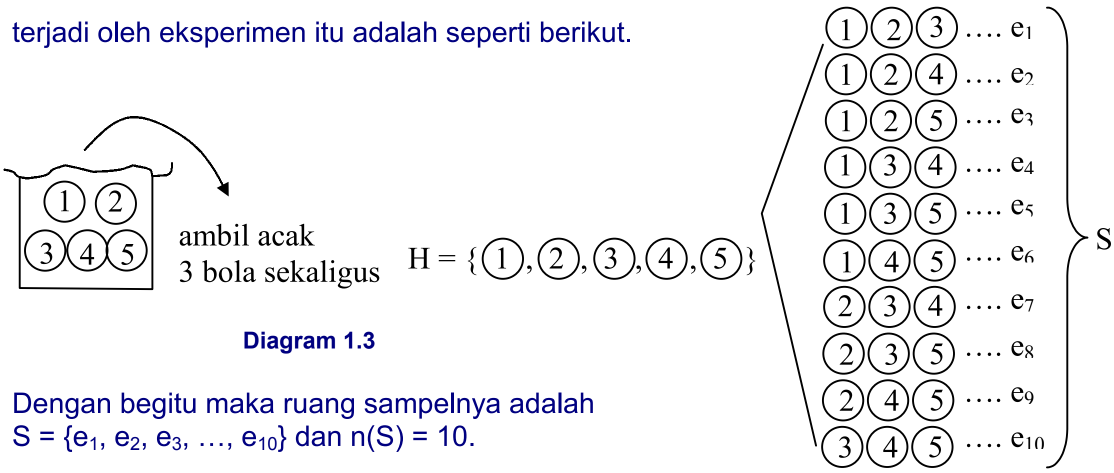


Diagram 1.3

Dengan begitu maka ruang sampelnya adalah
S = {e_1, e_2, e_3, …, e_{10}} dan n(S) = 10.

Catatan

Perhatikan bahwa semua hasil eksperimen yang mungkin ditunjukkan oleh elemen-elemen e_1, e_2,… hingga elemen e_{10} <u>tidak memungkinkan adanya pengulangan elemen H</u> (H adalah obyek eksperimennya). Amati bahwa dari e_1, e_2,… hingga elemen e_{10} tidak ada yang mengandung pengulangan elemen H, dan juga urutan elemennya dalam H tidak diperhatikan. Artinya hasil seperti 125 tidak dibedakan dengan hasil seperti 521 atau 215 dan lain-lain, sebab 125 = e_3 dibaca yang terambil adalah bola bernomor 1, 2 dan 5, sehingga hasil seperti 125 = 521 = 215. Artinya cukup diwakili oleh salah satu elemen saja misal 125, yaitu e_3.

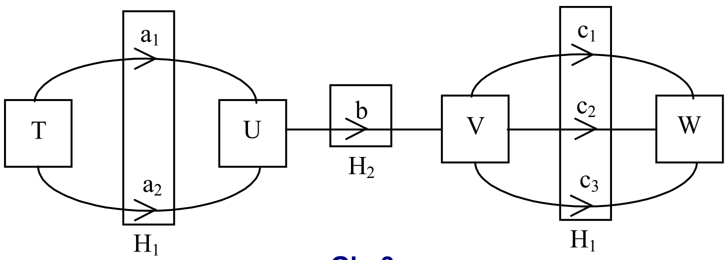
Perhitungan lebih lanjut tentang banyaknya anggota ruang sampel diberikan setelah siswa mengenal prinsip perkalian.

B. TEKNIK MEMBILANG

Berikut ini dibahas teknik-teknik (cara-cara) membilang atau menghitung banyaknya anggota ruang sampel dari suatu eksperimen tanpa harus mendaftar seluruh anggota ruang sampel tersebut.

1. Prinsip Perkalian.

Perhatikan ilustrasi berikut ini. Andaikan:



Gb. 3

$H_1 = \{a_1, a_2\}$ adalah macam jalur jalan dari kota T ke U

$H_2 = \{b\}$ adalah macam jalur jalan dari kota U ke V

$H_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ adalah macam jalur jalan dari kota V ke W.

Macamnya jalur jalan yang dapat dilewati dari kota T ke kota W melewati kota U dan V adalah $S = \{a_1bc_1, a_1bc_2, a_1bc_3, a_2bc_1, a_2bc_2, a_2bc_3\} = H_1 \times H_2 \times H_3$.

Perhatikan bahwa banyaknya jalur yang dimaksud adalah $n(S) = 6 = 2 \times 1 \times 3 = n(H_1) \times n(H_2) \times n(H_3)$. Dengan gambaran tersebut kesimpulan yang diperoleh adalah:

Jika ada 2 jalur dari kota T ke U

1 jalur dari kota U ke V

3 jalur dari kota V ke W

Maka ada

$2 \times 1 \times 3 = 6$ jalur jalan

yang dapat ditempuh dari kota T ke kota W melewati kota U dan V. Secara umum berlaku prinsip perkalian seperti berikut.

Prinsip Perkalian

> Jika n_1 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_1
> n_2 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_2
> n_3 adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_3
> ⋮
> n_r adalah banyaknya cara untuk mengambil keputusan K_r
> Maka ada
> $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_r$ cara
> untuk mengambil semua keputusan.

Setelah mengenal prinsip perkalian ini, perhitungan ruang sampel untuk 2 contoh sebelumnya, dapat digambarkan seperti berikut.

Dari Obyek	Eksperimen
H = {1,2,3,4,5}	1) membuat nomor undian terdiri dari 3 angka. 2) menyusun bilangan-bilangan terdiri dari 3 angka yang angka-angkanya saling berlainan.

Untuk contoh 1

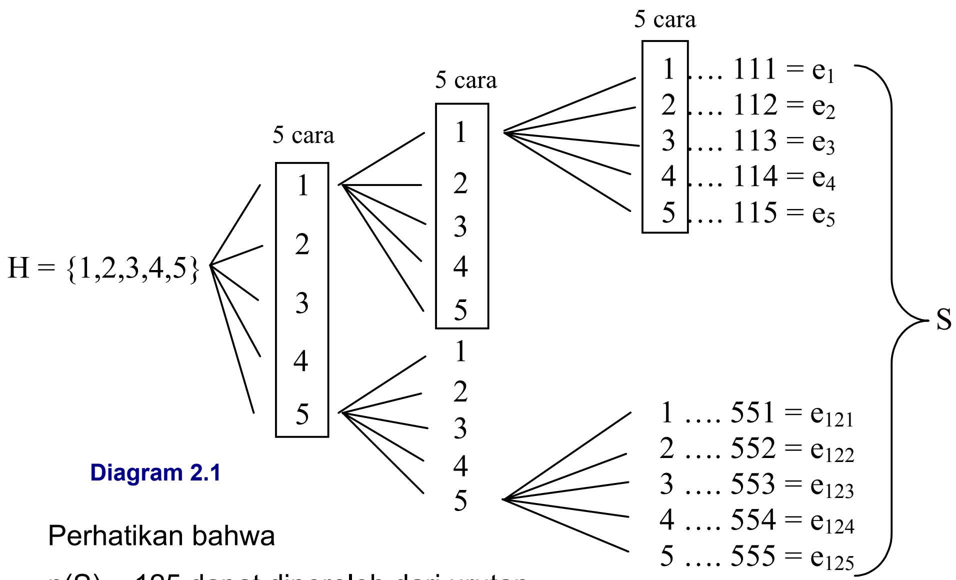


Diagram 2.1

Perhatikan bahwa
n(S) = 125 dapat diperoleh dari urutan pertama 5 cara dikalikan urutan kedua 5 cara dan urutan ketiga 5 cara, yakni
$n(S) = 5 \times 5 \times 5 = 125$

Untuk contoh 2

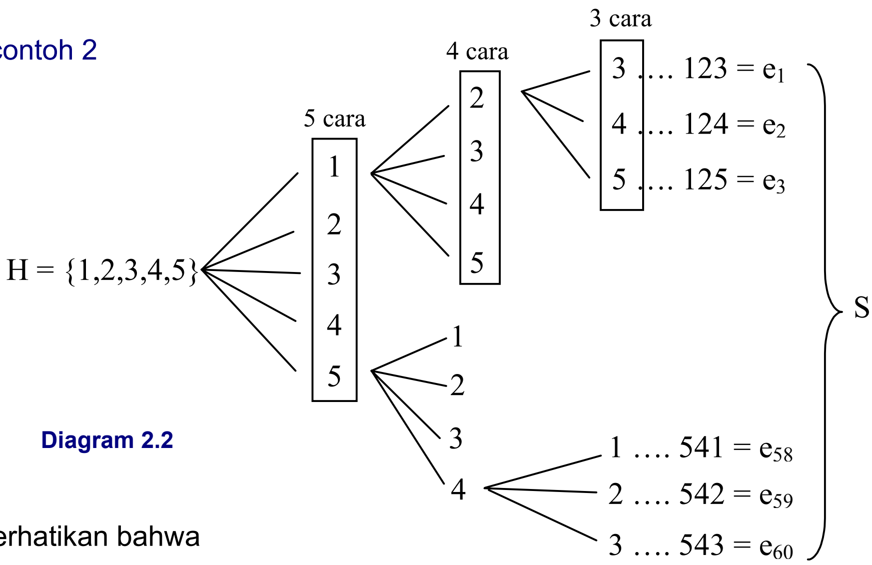


Diagram 2.2

Perhatikan bahwa
$n(S) = 60$ dapat diperoleh dari urutan pertama 5 cara dikalikan urutan kedua 4 cara dan urutan ketiga 3 cara, yakni
$n(S) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

Contoh Penggunaan Prinsip Perkalian Lainnya.

Ada berapa cara kita dapat menyusun bilangan genap terdiri dari 4 angka yang angka-angkanya saling berlainan?

Jawab

Pada soal tersebut yang dimaksud dengan obyek eksperimen adalah H = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} dan eksperimennya adalah menyusun nomor undian berupa bilangan genap tiga angka yang angka-angkanya saling berlainan. Untuk mempersingkat penjelasan dan mempermudah pemahaman diambil kesepakatan bahwa penulisan himpunan seperti $\{0, 1, \cancel{2}, 3, 4\}$ yang dimaksud adalah sama dengan {0, 1, 3, 4}. Jika u_1, u_2, u_3, u_4 berturut-turut menyatakan urutan angka-angka yang mungkin pada urutan pertama, kedua, ketiga dan keempat, maka u_4 yang mungkin adalah angka-angka 0, 2, 4, 6, 8.

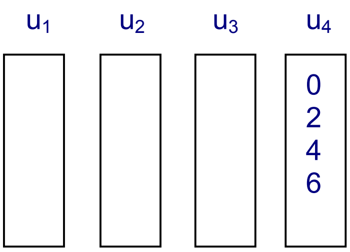


Diagram 3

8

Cara 1 (dengan penalaran lengkap)

Jika $u_4 = 0$, maka untuk menuliskan angka-angka pada:

u_1 ada 9 cara, sebab $u_1 \in \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

u_2 ada 8 cara, sebab salah satu unsur dari $\{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sudah ada yang menempati u_1

u_3 ada 7 cara, sebab 2 unsur diantara $\{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sudah ada yang menempati u_1 dan u_2.

Jika $u_4 = 2$, maka untuk menuliskan angka-angka pada:

u_1 ada 8 cara, sebab $u_1 \in \{\cancel{0}, 1, \cancel{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

u_2 ada 8 cara, sebab salah satu unsur dari $\{0, 1, \cancel{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ selain nol sudah ada di u_1

u_3 ada 7 cara, sebab 2 unsur dari $\{0, 1, \cancel{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ selain nol sudah ada yang menempati u_1 dan u_2.

………… demikianlah seterusnya.

Jika $u_4 = 8$, maka untuk menuliskan angka-angka pada:

u_1 ada 8 cara, sebab $u_1 \in \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cancel{8}, 9\}$

u_2 ada 8 cara, sebab salah satu unsur dari $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cancel{8}, 9\}$ selain nol sudah ada di u_1

u_3 ada 7 cara, sebab 2 unsur dari $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cancel{8}, 9\}$ selain nol sudah ada yang menempati di u_1 dan u_2.

…………… demikianlah seterusnya hingga

Dengan demikian maka :

Jika nilai $u_4 = 0$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam $9 \times 8 \times 7 =$ 504 cara

$u_4 = 2$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam $8 \times 8 \times 7 =$ 448 cara

$u_4 = 4$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam $8 \times 8 \times 7 =$ 448 cara

$u_4 = 6$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam $8 \times 8 \times 7 =$ 448 cara

$u_4 = 8$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam $8 \times 8 \times 7 =$ 448 cara

———————————————————————————— +

Kesimpulan : Banyaknya cara yang dimaksud = 2296 cara.

Artinya banyaknya cara adalah $n(S) = 2296$.

Cara 2 (cara singkat)

Untuk $u_4 = 0$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam

$9 \times 8 \times 7$ cara $= 504$ cara

Sedangkan untuk

$u_4 \neq 0$, maka angka urutan ke 1, 2 dan 3 dapat dipilih dalam

$8 \times 8 \times 7$ cara sehingga untuk itu ada $4 \times 8 \times 8 \times 7$ cara $= 1792$ cara +

Total n(S) = 2296.

Kesimpulan:

Banyaknya cara yang mungkin untuk menyusun bilangan genap terdiri dari 4 angka yang saling berlainan adalah sama dengan 2296.

Latihan 1

1. Ada berapa cara nomor telepon terdiri dari 6 angka yang mungkin untuk dibuat dan dijual pada pelanggan (konsumen)? Ingat nomor telepon yang dijual angka pertamanya tidak nol.

2. Ada berapa cara yang mungkin suatu nomor kendaraan terdiri dari 4 angka dengan satu huruf di depan dan 2 huruf di belakang dapat dibuat? Ingat nomor kendaraan tidak membolehkan angka nol di urutan paling depan. Angka-angkanya diperoleh dari angka standar {0, 1, 2, …, 9} sedang huruf-hurufnya diperoleh dari huruf abjad {A, B, C, …, Z} tanpa huruf I dan O.

3. Ada berapa cara kita dapat menyusun bilangan genap yang terdiri dari :
   a. 5 angka yang angka-angkanya saling berlainan
   b. 6 angka yang angka-angkanya saling berlainan
   c. 9 angka yang angka-angkanya saling berlainan
   d. 10 angka yang angka-angkanya saling berlainan
   e. 11 angka yang angka-angkanya saling berlainan.

4. Ada berapa cara kita dapat menyusun bilangan ganjil yang terdiri dari :
   a. 5 angka yang angka-angkanya saling berlainan
   b. 6 angka yang angka-angkanya saling berlainan

c. 9 angka yang angka-angkanya saling berlainan
d. 10 angka yang angka-angkanya saling berlainan
e. 11 angka yang angka-angkanya saling berlainan.

5. Penelitian medis terhadap seseorang dikelompokkan menurut salah satu dari 2 jenis kelamin, salah satu dari 4 macam golongan darah, dan salah satu dari 3 macam warna kulit. Tentukan banyaknya seluruh kriteria yang mungkin dalam penelitian medis tersebut.

2. *Penurunan Rumus Permutasi dan Kombinasi*

a. Notasi Faktorial

Notasi faktorial merupakan materi penunjang yang diperkenalkan pada siswa untuk memudahkan mereka memahami penurunan rumus permutasi dan kombinasi. Contoh yang diberikan misalnya adalah seperti berikut.

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Keterangan:

5! dibaca "lima faktorial"

4! dibaca "empat faktorial"

b. Penurunan Rumus Permutasi

Untuk diketahui bahwa

Kasus permutasi adalah eksperimen terhadap suatu obyek berupa himpunan H yang menghasilkan ruang sampel dimana titik-titik sampelnya tidak memungkinkan pengulangan elemen-elemen dalam H namun urutan elemen-elemen H pada setiap titik sampelnya diperhatikan.

Misalkan ada 3 regu peserta tebak tepat tingkat SMA akan bertanding di babak final yang menyediakan 3 macam kategori hadiah (hadiah I, II, dan III). Ada berapa cara hadiah itu dapat diberikan?

Jika regu A, B, dan C adalah obyek-obyek yang dimaksud, maka yang dimaksud sebagai himpunan obyek eksperimennya adalah H = {A, B, C}. Eksperimen yang dimaksud adalah melakukan lomba tebak tepat kepada ketiga regu tersebut. Ruang sampel dari eksperimen itu adalah himpunan semua hasil yang mungkin terjadi.

Gambarannya adalah sebagai berikut.

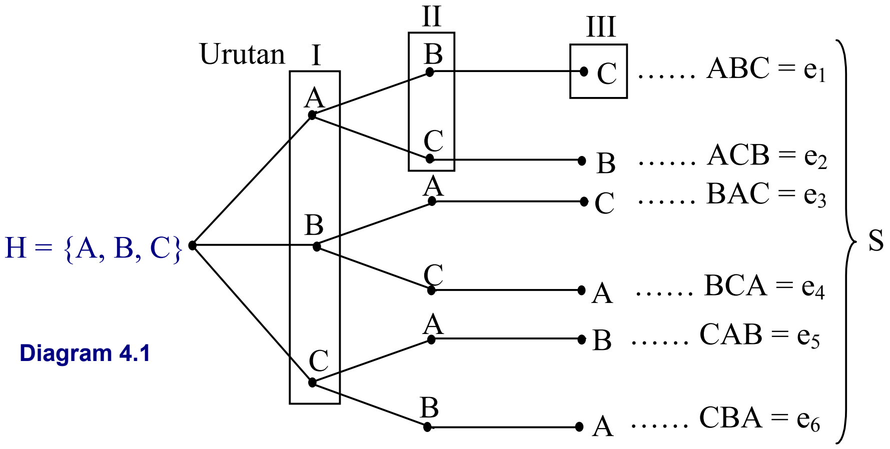


Diagram 4.1

Perhatikan bahwa susunan elemen-elemen seperti ABC, ACB, … hingga CBA masing-masing disebut permutasi.

Selanjutnya diperoleh ruang sampel S = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6} sehingga n(S) = 6.

Dilihat dari diagramnya,

n(S) = n(urutan I) $\times$ n(urutan II) $\times$ n(urutan III)

= 3 cara $\times$ 2 cara $\times$ 1 cara = 3! = 6

= Banyaknya permutasi 3 hadiah dari 3 peserta

= $P^{3\text{peserta}}_{3\text{hadiah}} = P^3_3$

Apabila pesertanya 3 orang sementara hadiahnya hanya 2 macam (hadiah I dan hadiah II) maka gambaran ruang sampelnya adalah seperti berikut.

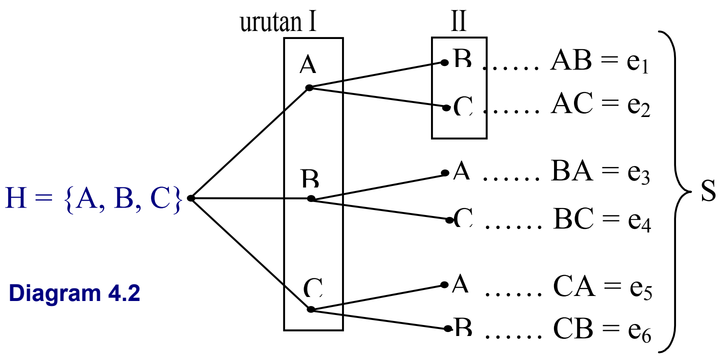


Diagram 4.2

Ruang sampel S = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6} sehingga n(S) = 6.

Dilihat dari diagramnya,

$n(S) = n(\text{urutan I}) \times n(\text{urutan II})$

$= \quad 3 \text{ cara} \quad \times \quad 2 \text{ cara} \quad = 3 \times 2 = 6$

= banyaknya permutasi 2 hadiah dari 3 peserta

$= P^{3\,\text{peserta}}_{2\,\text{hadiah}} = P^3_2$. Lambang lain untuk P^3_2 adalah ${}_3P_2$ atau $P_{(3,\,2)}$.

Dari kedua contoh sederhana tersebut mudah dibayangkan bahwa apabila pesertanya 10 orang sementara hadiahnya 3 macam, maka ruang sampel S mempunyai anggota sebanyak

$n(S) = P^{10\,\text{peserta}}_{3\,\text{hadiah}} = P^{10}_3$

$= n(\text{urutan I}) \quad \times \quad n(\text{urutan II}) \quad \times \quad n(\text{urutan III})$

$= 10(\text{cara/cabang}) \times \quad 9(\text{cara/cabang}) \times \quad 8(\text{cara/cabang})$

$= 10 \times 9 \times 8$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \ldots \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{10!}{7!} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

Secara umum menggunakan prinsip perkalian, banyaknya permutasi dari n obyek yang berlainan ada $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$,

sedangkan banyaknya permutasi r obyek yang dipilih dari n obyek yang berlainan ada $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. Dengan begitu banyaknya permutasi r obyek dari n obyek yang berlainan diberikan lambang

$\boxed{P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}}$ dengan n! dibaca ″n faktorial″ dan $n! = n(n-1)(n-2) \ldots (2)(1)$.

Catatan

Secara konsep nol faktorial (0!) tidak ada sebab konsep faktorial berasal dari permutasi dan permutasi berasal dari banyaknya urutan pemenang yang mungkin pada sebuah pertandingan/kontes/sayembara. Dalam pertandingan pesertanya minimal = 1 dan hadiahnya minimal = 1, sehingga banyaknya urutan = 1. Itulah konsep1!, tetapi dalam setiap perhitungan yang melibatkan notasi faktorial, hasil perhitungan selalu benar sesuai konsep jika diberikan nilai 0! = 1. Agar tidak terjadi kontradiksi selanjutnya *didefinisikan bahwa 0! = 1*.

Contoh 1

Hitunglah: a. $P_3^{20} = \ldots$

b. $P_2^{100} = \ldots$

Jawab

a. Dengan penalaran langsung, yaitu $n(u_1) = 20$, $n(u_2) = 19$, dan $n(u_3) = 18$. Maka

$P_3^{20} = 20 \times 19 \times 18 = 6840.$

Jika menggunakan rumus

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ maka } P_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{17!}}{\cancel{17!}} = 6840.$$

b. Dengan penalaran langsung diperoleh

P_2^{100} = n(urutan I) $\times$ n(urutan II) = 100 $\times$ 99 = 9900.

Contoh 2

Misalkan suatu sayembara memperebutkan 3 hadiah (hadiah I, II, dan III masing-masing sebesar 10.000 rupiah, 7.500 rupiah dan 5.000 rupiah) diikuti oleh 7 orang peserta. Untuk menentukan pemenangnya dilakukan dengan mengacak nomor undiannya. Ada berapa cara hadiah-hadiah itu dapat diberikan?

Jawab

Perhatikan bahwa cara undian seperti itu tidak memungkinkan seseorang mendapatkan lebih dari 1 hadiah (pengulangan elemen H dengan n(H) = 8 tidak dimungkinkan). Selain itu jika pemenangnya ABC artinya A dapat hadiah I, B dapat hadiah II, dan C dapat hadiah III, oleh sebab itu jelas hasil seperti ABC $\neq$ BCA $\neq$ CAB dan lain-lain. Kesimpulannya eksperimen seperti itu merupakan ***kasus permutasi***. Maka banyaknya cara adalah n(S) = $P_3^7 = \underbrace{7 \times 6 \times 5}_{3 \text{ faktor}} = 210$.

c. Penurunan Rumus Kombinasi

Perlu diingat bahwa

Kasus kombinasi adalah eksperimen terhadap suatu obyek berupa himpunan H yang menghasilkan ruang sampel dimana titik-titik sampelnya juga tidak memungkinkan pengulangan elemen-elemen H tetapi urutan elemen H pada setiap titik sampelnya tidak diperhatikan.

Misalkan dari 4 bersaudara Ali (A), Budi (B), Cahya (C), dan Doni (D) diundang 2 orang diantaranya untuk rapat keluarga. Ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi? Bagaimana pula jika yang diundang adalah 3 orang dari 4 bersaudara itu?

Dari permasalahan tersebut yang dimaksud dengan obyek eksperimennya adalah H = {A, B, C, D} sedangkan eksperimennya adalah mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 2 orang wakilnya. Sesudah itu eksperimennya diganti mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 3 orang wakilnya. Ruang sampel dari masing-masing eksperimen itu adalah himpunan dari semua hasil yang mungkin terjadi pada eksperimen itu. Penalaran selengkapnya adalah seperti berikut.

Tabel 1.1

No.	Obyek Eksperimen	Cara Eksperimen	Hasil-hasil yang Mungkin
1.	H = {A, B, C, D}	mengundang 2 orang wakilnya untuk rapat keluarga	AB = e_1 AC = e_2 AD = e_3 BC = e_4 BD = e_5 CD = e_6 n(S) = 6
2.	H = {A, B, C, D}	mengundang 3 orang wakilnya untuk rapat keluarga	ABC = e_1 ABD = e_2 ACD = e_3 BCD = e_4 n(S) = 4

Rangkaian hasil-hasil eksperimen yang mungkin terjadi seperti misalnya AB, AC, AD pada contoh 1 di atas disebut kombinasi 2 elemen dari 4 elemen. Sedangkan ABC, ABD, ACD pada contoh 2 disebut kombinasi 3 elemen dari 4 elemen. Banyaknya kombinasi adalah banyaknya semua rangkaian elemen-elemen dalam H yang mungkin terjadi dalam eksperimen itu. Banyaknya kombinasi 2 elemen dari 4 elemen yang tersedia dilambangkan dengan C_2^4 atau $C_{(4,2)}$ atau ${}_4C_2$ atau $\binom{4}{2}$.

Dari kedua contoh itu diperoleh $C_2^4 = 6$ dan $C_3^4 = 4$.

Selanjutnya dalam hubungannya dengan permutasi dan penggunaan notasi faktorial penurunan rumusnya dilakukan seperti berikut.

Untuk C_2^4 (Kombinasi 2 dari 4).

Tabel 1.2

Macam Kombinasi	Jika Elemen-elemen Kombinasi itu dipermutasikan	Banyaknya Permutasi
e_1 = AB	AB, BA	2!
e_2 = AC	AC, CA	2!
e_3 = AD	AD, DA	2!
e_4 = BC	BC, CB	2!
e_5 = BD	BD, DB	2!
e_6 = CD	CD, DC	2!
$C_2^4 = 6$	$P_2^4 = \underbrace{4 \times 3}_{2\text{faktor}} = 12$	$6 \times 2!$

Untuk C_3^4 (Kombinasi 3 dari 4)

Tabel 1.3

Macam Kombinasi	Jika Elemen-elemen Kombinasi itu dipermutasikan	Banyaknya Permutasi
e_1 = ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA	3!
e_2 = ABD	ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA	3!
e_3 = ACD	ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA	3!
e_4 = BCD	BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB	3!
$C_3^4 = 4$	$P_3^4 = \underbrace{4 \times 3 \times 2}_{3\text{faktor}} = 24$	$4 \times 3!$

Perhatikan bahwa

$$P_2^4 = 4 \times 3 = 12 = 6 \times 2! = C_2^4 \times 2!$$

$$P_3^4 = 4 \times 3 \times 2 = 24 = 4 \times 3! = C_3^4 \times 3!$$

Dengan pemikiran yang sama, ternyata secara umum berlaku bahwa:

$$P_r^n = C_r^n \times r! \text{ atau } \boxed{C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} \text{ atau } \boxed{C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

Contoh 1

Hitunglah: a. $C_3^{20} = ...$

b. $C_{17}^{20} = ...$

Jawab

a. Karena selisih antara 3 dan 20 relatif jauh, maka rumus yang lebih praktis digunakan adalah

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} \text{ sehingga } C_3^{20} = \frac{P_3^{20}}{3!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

b. Karena 17 dan 20 berselisih relatif dekat, maka rumus yang lebih praktis digunakan adalah $C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$, sehingga

$$C_{17}^{20} = \frac{20!}{(20-17)!17!} = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times \cancel{17!}}{6 \times \cancel{17!}} = 1140.$$

Contoh 2

Dalam suatu arisan masih ada 12 orang yang belum mendapatkan hadiah. Sementara itu dalam setiap pertemuan arisan ditetapkan 4 peserta berhak mendapat hadiah masing-masing sebesar Rp 75.000,00. Jika diadakan undian, ada berapa cara hadiah arisan itu dapat diberikan?

Jawab

Perhatikan bahwa dengan aturan undian seperti itu tidak mungkin seseorang untuk mendapatkan hadiah lebih dari satu kali (pengulangan elemen H dengan n(H) = 12 tidak dimungkinkan). Karena hadiahnya sama bagi para pemenang maka jika pemenangnya ABCD maka A, B, C, dan D masing-masing akan menerima hadiah yang sama (yakni sebesar Rp 75.000,00), itu berarti hasil seperti ABCD = BCDA = CDAB dan lain-lain. Artinya urutan pemenang tidak diperhatikan, sehingga eksperimen seperti itu merupakan ***kasus kombinasi.*** Maka banyaknya cara adalah

$$n(S) = C_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}\, 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

d. Segitiga Pascal

Segitiga Pascal ialah segitiga yang dibentuk oleh bilangan-bilangan yang bersesuaian dengan koefisien-koefisien pangkat bulat non negatif dari suatu suku dua (a + b). Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 &&= 1\\
(a+b)^1 &= a+b &&= 1a+1b\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 &&= 1a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 &&= 1a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
& &&= C_0^3.a^3+C_1^3.a^2b+C_2^3.ab^2+C_3^3.b^3
\end{aligned}
$$

………………. dan seterusnya ……………………………………….

$$(a+b)^n = C_0^n.a^n + C_1^n.a^{n-1}.b + C_2^n.a^{n-2}.b^2 + C_3^n.a^{n-3}.b^3 + \ldots + C_n^n.b^n$$

Koefisien-koefisien pangkat bulat non negatif dari $(a + b)^n$ seperti $C_o^n, C_1^n, C_2^n, \ldots$ dan seterusnya hingga C_n^n untuk n = 0, n = 1, n = 2, … dan seterusnya itulah yang kemudian membentuk pola bilangan yang terkenal dengan nama segitiga Pascal, suatu penghormatan kepada matematikawan Perancis bernama Blaise Pascal yang hidup pada tahun 1623 – 1662.

Dengan memperhatikan nilai koefisiennya saja untuk pangkat bulat non negatif dari nol hingga lima akan diperoleh segitiga Pascal seperti yang ditunjukkan pada diagram 5 berikut.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Diagram 5

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_1^3 & & C_3^3 & & \\
 & C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & \\
C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5
\end{array}
$$

Dengan adanya kesesuaian itu maka perhitungan-perhitungan kombinasi yang hanya melibatkan bilangan-bilangan kecil langsung dapat dilakukan berdasarkan kesesuaiannya dengan bilangan yang ada pada segitiga Pascal.

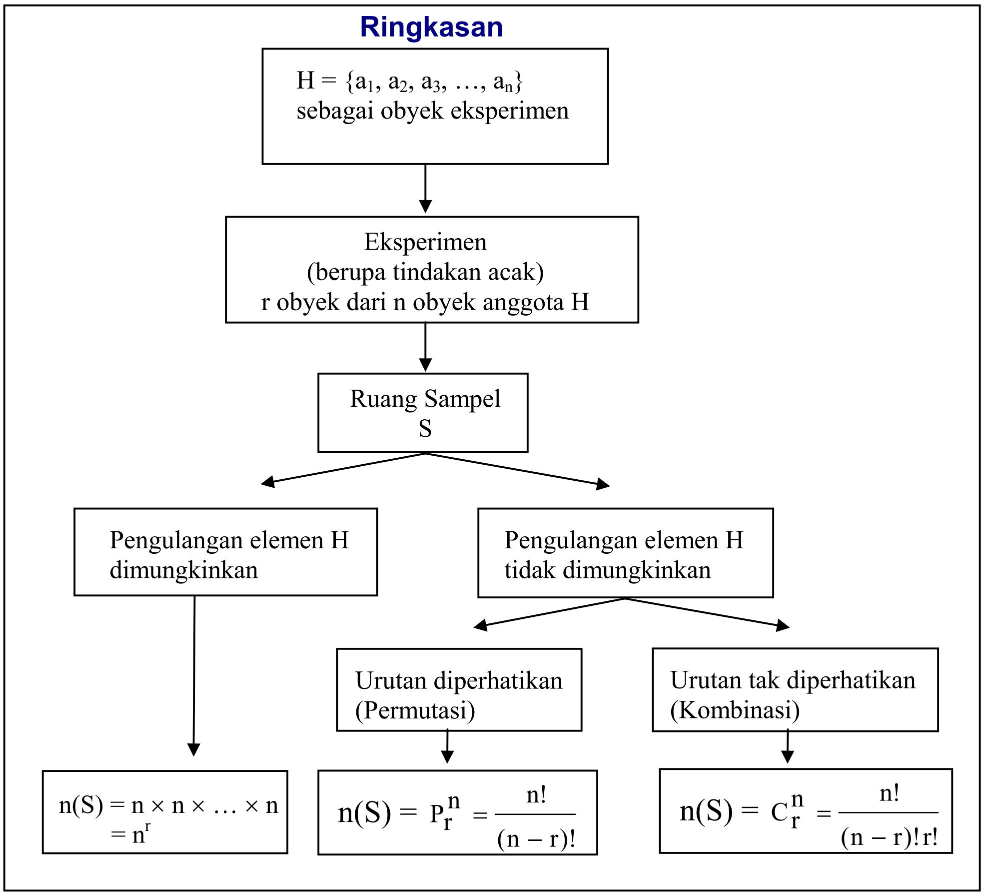
Contoh

Hitunglah k, jika k = $\dfrac{C_1^3.C_1^2}{C_2^5}$.

Jawab

Dengan melihat segitiga Pascal maka k = $\dfrac{C_1^3 . C_1^2}{C_2^5} = \dfrac{3.2}{10} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

Diagram 6



Latihan 2

Hitunglah

a. P_3^{10} d. C_3^{20}

b. C_4^{10} e. P_2^{100}

c. P_3^{20} f. C_3^{100}

2. Pada suatu arisan yang diikuti oleh 20 orang akan diundi sehingga 3 diantara anggotanya berhak menerima hadiah (dinyatakan putus arisan). Ada berapa cara yang mungkin terjadi atas ketiga pemenang arisan itu jika

a. Nilai hadiahnya tidak sama
b. Nilai hadiahnya sama
c. Samakah antara a dan b berikan alasannya.

3. Dari angka-angka dasar 0, 1, 2, …, 9 ada berapa cara kita dapat menulis bilangan yang terdiri dari
   a. 3 angka c. 3 angka yang saling berlainan
   b. 4 angka d. 4 angka yang saling berlainan

4. a. Dari 4 orang bersaudara A(Ali), B(Budi), C(Cahya), dan D(Doni) diundang 3 orang wakilnya untuk mengikuti rapat keluarga. Tuliskan ruang sampelnya (himpunan tiga orang - tiga orang yang mungkin dapat hadir memenuhi undangan itu). Dari ruang sampel itu ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi.
   b. Tanpa menulis ruang sampelnya, ada berapa cara undangan dari panitia kepada 2 orang sebagai wakil dari satu kelas yang berjumlah 40 orang dapat dipenuhi?

5. a. Jika dalam 1 ruang pertunjukkan tinggal tersisa 5 kursi kosong sementara yang terakhir masuk ada 9 orang, ada berapa cara kelima kursi kosong itu dapat diduduki oleh kesembilan orang yang berhak duduk itu?
   b. Bagaimana halnya dengan jika kursi kosongnya ada 9 sementara yang akan mendudukinya 5 orang. Ada berapa cara kesembilan kursi kosong itu dapat diduduki?

Petunjuk: Cobalah menggunakan bilangan yang lebih kecil misal 3 dan 2 atau sebaliknya, tentukan ruang sampelnya dan amati elemen-elemennya apakah termasuk pengulangan dimungkinkan, ataukah permutasi, ataukah kombinasi. Dari situ kita dapat menerapkannya untuk bilangan yang lebih besar.

6. a. Ada berapa cara kita dapat menuliskan bilangan bulat positip yang tediri atas 3 angka? Bagaimana halnya kalau 5 angka?
   b. Ada berapa cara kita dapat menuliskan bilangan bulat positip yang terdiri atas 3 angka yang angka-angkanya saling berlainan? Bagaimana halnya kalau 5 angka yang angka-angkanya saling berlainan?
   c. Ada berapa cara nomor telepon lokal (terdiri atas 6 digit/angka) dapat disedia-

kan? Ingat telepon lokal angka pertamanya tidak boleh nol!

d. Bagaimana halnya dengan nomor kendaraan yang terdiri dari 4 angka?

C. PERMUTASI DENGAN BEBERAPA UNSUR SAMA DAN PERMUTASI SIKLIS

1. Permutasi dengan beberapa unsur sama

Perlu diketahui bahwa konteks permutasi dengan beberapa unsur sama dalam hal ini berbeda dengan permutasi yang telah dikemukakan sebelumnya. Letak perbedaannya ialah pada susunan elemen-elemennya. Permutasi (tanpa istilah tambahan) bermakna sebagai susunan elemen-elemen dari suatu himpunan berupa urutan yang tidak membolehkan adanya pengulangan elemen, sementara permutasi dengan beberapa unsur sama membolehkan adanya pengulangan elemen.

Contoh

Ada berapa cara kita dapat menuliskan susunan huruf yang berasal dari kata "MAMA".

Jawab

Perhatikan bahwa huruf-huruf penyusun kata "MAMA" diambilkan dari himpunan {M, A} yaitu himpunan huruf-huruf abjad terdiri atas huruf M dan A. M dan A masing-masing diulang 2 kali pada kata MAMA. Berikut adalah susunan huruf-huruf yang mungkin.

Ada 6 cara

1. MMAA
2. MAMA → $M_1 \; A_1 \; M_2 \; A_2$, $M_2 \; A_2 \; M_1 \; A_1$, $M_1 \; A_2 \; M_2 \; A_1$, $M_2 \; A_1 \; M_1 \; A_2$
3. AMMA
4. AMAM
5. AAMM
6. MAAM

Diagram 7

Dengan demikian, maka ada 6 cara untuk menulis susunan huruf berbeda yang berasal dari kata "MAMA".

Sekarang dari diagram itu perhatikan bahwa

$$6 = \frac{\text{Seluruh permutasi setelah M dan A diberi indeks sesuai banyaknya huruf}}{\text{Masing - masing dari 6 anggota setelah diberi indeks memuat 4 cabang}}$$

$$= \frac{4!\,(\text{banyaknya permutasi 4 huruf dari 4 huruf berlainan})}{4\,(\text{masing - masing anggota dari 6 anggota memuat 4 cabang})}$$

$$= \frac{4!}{2!\,(\text{permutasi dari } M_1 \text{ dan } M_2) \times 2!\,(\text{permutasi dari } A_1 \text{ dan } A_2)}$$

$$= \frac{4!}{2!\,2!}$$

Contoh lain misalnya :

Ada berapa cara kita dapat menyusun secara berjajar 4 bendera merah, 2 bendera kuning dan 1 bendera hijau.

Jawab

Misalkan MMMMKKB adalah yang dimaksud sebagai 4 bendera merah, 2 bendera kuning dan 1 bendera biru.

MMMMKKB $\Rightarrow$ ada 7 bendera terdiri dari

bendera merah : M = 4 buah

bendera kuning : K = 2 buah

bendera biru : B = 1 buah

Sehingga :

Susunan bendera yang dapat dibuat dari bendera-bendera MMMMKKB adalah:

$$P^{7}_{(4,2,1)} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!} = \frac{7.6.5.4!}{4!.2} = 105 \text{ cara.}$$

Secara matematika dapat dipikirkan demikian :

Banyaknya cara mengambil 4 bendera K dari 7 bendera yang ditempati adalah : C^{7}_{4}; sehingga tinggal (7 – 4) = 3 bendera/obyek sisanya.

Banyaknya cara memperoleh 2 bendera K dari (7 – 4) = 3 bendera sisanya adalah C^{7-4}_{2}, sehingga sisa terakhirnya tinggal (7 – 4 – 2) = 1 bendera yang ditempati.

Banyaknya cara memilih 1 bendera B dari 1 bendera sisa terakhir adalah: C^{1}_{1}.

Sehingga banyaknya cara membentuk susunan bendera berbeda dari bendera-bendera MMMMKKB adalah :

$$P^{7}_{(4,2,1)} = C^{7}_{4}\,.\,C^{(7-4)}_{2}\,.\,C^{(7-4-2)}_{1} = C^{7}_{4}\,.\,C^{3}_{2}\,.\,C^{1}_{1} = \frac{P^{7}_{4}}{4!}\,.\,\frac{P^{3}_{2}}{2!}\,.\,\frac{P^{1}_{1}}{1!}$$

$$= \frac{(7\,.\,6\,.\,5\,.\,4)\,.\,(3\,.\,2).(1)}{4!\quad 2!\quad 1!} = \frac{7!}{4!\,2!\,1!}\,.$$

Secara umum banyaknya cara membentuk susunan n obyek terdiri dari n_1 obyek sama, n_2 obyek sama, … dan seterusnya hingga n_k obyek sama adalah

$$P^{n}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = C^{n}_{n_1}\,.\,C^{n-n_1}_{n_2}\,.\,C^{n-n_1-n_2}_{n_3}\ldots C^{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}_{n_k}$$

$$= \frac{n!}{\cancel{(n-n_1)!}n_1!}\,.\,\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2)!}n_2!}\,.\,\frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}n_3!}\ldots$$

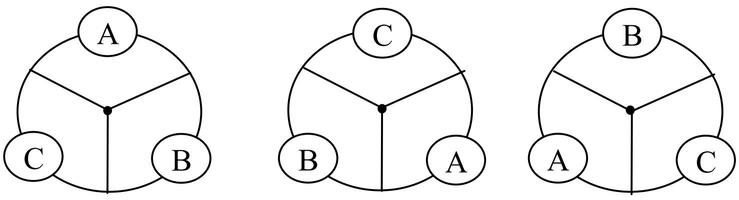
$$\frac{\cancel{(n-n_1-n_2-n_3-\ldots}-n_k)!}{\underbrace{(n-n_1-n_2-\ldots-n_k)}_{0!}!\,n_k!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots 0!\,n_k!}, \text{karena } 0! = 1 \text{ maka}$$

$$\boxed{P^{n}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_k!} \quad \text{dengan } n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

2. *Permutasi Siklis*

Misalkan 3 orang anak, sebut saja bernama A, B dan C disuruh menempati tempat duduk yang dapat diputar mengelilingi titik pusatnya (Jawa: permainan lombak banyu di pasar malam). Jadi urutan cara menempati tempat duduk dihitung berdasarkan urutan melingkar, antara lain seperti gambar.



Gb.4.1 Gb.4.2 Gb.4.3

Sekarang apabila kedua muka kursi lingkar itu diputar searah jarum jam menurut porosnya, apa yang terjadi? Yang terjadi adalah masing-masing anak tidak beranjak dari tempat duduknya. Yang tampak berubah hanyalah letak tempat duduk terhadap tanah. Jadi boleh dikatakan bahwa urutan tempat duduk tetap, sehingga permutasi seperti yang ditunjukkan oleh gambar tersebut di atas adalah:

(a) yaitu ABC $\Big\}$

(b) yaitu CAB masing-masing dianggap sama. Jadi urutan
(c) yaitu BCA ABC = CAB = BCA.

Dengan demikian cukup ditulis sebagai satu permutasi saja dengan A sebagai patokan untuk menentukan urutan secara melingkar searah jarum jam. Jadi ketiga permutasi di atas pada hakekatnya adalah satu permutasi siklik saja yaitu ABC.

Teknik untuk mengetahui apakah 2 permutasi itu sama atau tidak secara lebih cepat dilakukan dengan cara menulis ulang permutasi itu di kanan permutasi semula. Selanjutnya dengan huruf A sebagai patokan kita bentuk urutan ke kanan sebanyak n dengan n = banyaknya obyek.

Perhatikan bahwa

(a) yaitu ABC . ABC

(b) yaitu CAB . CAB

(c) yaitu BCA . BCA

Ternyata tampak pada masing-masing permutasi adanya urutan ABC. Sehingga urutan ABC, CAB, BCA cukup diwakili oleh satu permutasi saja yaitu ABC.

Contoh 1

Samakah permutasi siklik?

(a) BCDA dengan CDAB?

(b) BCDA dengan DCAB?

Penyelesaian

Dengan teknik menulis ulang dan melatakkan A di urutan pertama diperoleh

(a) BCDA $\Rightarrow$ BCDA . BCDA. Jadi BCDA = ABCD

CDAB $\Rightarrow$ CDAB . CDAB. Jadi CDAB = ABCD

Kesimpulannya

Permutasi siklik BCDA = CDAB sebab masing-masing sama dengan ABCD

(b) BCDA $\Rightarrow$ BCDA . BCDA jadi BCDA = ABCD

DCAB $\Rightarrow$ DCAB . DCAB jadi DCAB = ABDC

Kesimpulannya

Permutasi siklik BCDA $\neq$ DCAB

Contoh 2

Tentukan banyaknya permutasi siklik dari

(a) Himpunan dengan 2 anggota yaitu $\{A_1, A_2\}$

(b) Himpunan dengan 3 anggota yaitu $\{A_1, A_2, A_3\}$

(c) Himpunan dengan 4 anggota yaitu $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

(d) Himpunan dengan n anggota yaitu $\{A_1, A_2, A_3, \ldots , A_n\}$.

Penyelesaian

(a) Dari $\{A_1, A_2\}$ ada 1 permutasi siklik yaitu $A_1\ A_2$.

(b) Dari $\{A_1, A_2, A_3\}$ ada 2 permutasi siklik yaitu

$A_1\ A_2\ A_3$

dan

$A_1\ A_3\ A_2$

(c) Dari $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ada 6 permutasi siklik yaitu

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

$A_1\ A_2\ A_4\ A_3$

$A_1\ A_3\ A_2\ A_4$

$A_1\ A_3\ A_4\ A_2$

$A_1\ A_4\ A_2\ A_3$

$A_1\ A_4\ A_3\ A_2$

Tampak di sini bahwa A_1 sebagai patokan diletakkan di urutan paling depan, sedangkan urutan selanjutnya adalah permutasi dari $\{A_2, A_3, A_4\}$ yaitu sebanyak 6 = 3!.

(d) Dengan penalaran yang sama dengan nomor (c) maka A_1 dinyatakan sebagai patokan yang ditulis pada urutan terdepan, sedangkan urutan berikutnya adalah permutasi dari $\{A_2, A_3, A_4, \ldots , A_n\}$ yang memiliki $(n - 1)$ anggota sehingga jika dipermutasikan akan terdapat $(n - 1)!$ macam permutasi yang berbeda.

Dengan demikian

Banyaknya permutasi siklik dari himpunan yang beranggota n adalah

$$P_s^n = (n-1)!$$

Latihan 3

1. Ada berapa cara kita dapat menyusun susunan huruf-huruf yang berasal dari kata
   a. MATEMATIKA c. LPMP
   b. PPKN d. STATISTIK

2. Suatu regu gerak jalan terdiri dari 7 orang terdiri dari 5 pria dan 2 wanita. Ada berapa cara susunan baris berbaris yang dapat dibentuk jika
   a. asal terbentuk formasi barisan (baris-berbaris)
   b. kedua wanita harus saling berdekatan
   c. diantara kedua wanita terdapat 1 pria
   d. diantara kedua wanita terdapat 2 pria

   Catatan

   Anggaplah bahwa kita tidak dapat membedakan diantara kedua wanita dan kita tidak dapat membedakan diantara kelima pria.

3. Dari 7 orang peserta kemah dibentuk formasi melingkar mengelilingi api unggun. Ada berapa cara formasi itu dapat dibentuk.

4. Ada berapa cara hadiah arisan masing-masing sebesar Rp 60.000,00 dapat diberikan kepada 4 orang pemenang dari peserta yang berhak diundi sebanyak 10 orang?

5. Ada berapa cara 3 macam hadiah yang masing-masing senilai 100.000 rupiah, 75.000 rupiah, dan 50.000 rupiah dapat diberikan kepada peserta sayembara sebanyak 10 orang?

6. Dari 5 orang penari diacak, 3 orang direncanakan akan menari di hotel A dan 2 orang menari di hotel B dalam waktu yang bersamaan. Ada berapa cara hasil (formasi penari) yang mungkin dapat dibentuk? Bagaimana jika ada 20 penari diambil secara acak 5 orang untuk menari di hotel A dan 7 orang untuk menari di hotel B dalam waktu yang bersamaan?

7. Misalkan kita mengadakan undian satu demi satu kepada 5 orang dengan aturan seperti berikut:
   Nama yang terundi pertama kali berhak mendapat hadiah Rp 10.000,00. Nama kedua yang terundi berhak mendapat hadiah Rp 8.000,00. Sisanya diambil secara acak 2 orang berhak atas hadiah senilai masing-masing Rp 3.000,00. Ada berapa cara hasil yang mungkin terjadi?

8. Suatu sayembara memberikan 1 hadiah pertama, 1 hadiah kedua, 4 hadiah ketiga dan 10 hadiah hiburan. Jika sayembara itu diikuti oleh 100 orang, ada berapa cara hadiah itu dapat diberikan? (Tuliskan jawabannya dalam bentuk rumus permutasi dan kombinasi). Bagaimana halnya jika hadiah yang disediakan terdiri dari 1 hadiah utama, 3 hadiah kedua, 4 hadiah ketiga dan 10 hadiah hiburan sementara peserta undiannya 200 orang?

DAFTAR PUSTAKA

1. Anonim, (2002). ***Pembelajaran Matematika yang Kontekstual atau Realistik di SLTP, (2002).*** Yogyakarta: PPPG Matematika.
2. Anonim, (2002). ***Pembelajaran Aritmetika Sosial di Sekolah Dasar.*** PPPG Matematika.
3. Anonim, (2003). ***Kurikulum Berbasis Kompetensi Mata Pelajaran Matematika Sekolah Dasar.*** Jakarta: Deppennas.
4. Djoko Moesono dan Sujono, (1994). ***Matematika 4.*** Jakarta: Balai Pustaka.
5. Djoko Moesono dan Siti M. Amin, (1996). ***Matematika 5.*** Jakarta: PT. Widya Scan Indonesia.
6. Faried Wijaya, (1992). ***Komponen Ekonomika Terutama untuk Para Non Ekonom, Volum tiga.*** Yogyakarta: BPFE.
7. Faried Wijaya, (1992). ***Komponen Ekonomika Terutama untuk Para Non Ekonom, Volum Tiga.*** Yogyakarta: BPFE.
8. Herry Sukarman, (2002). ***Aritmetika Sosial. Modul yang digunakan dalam pelatihan terintegrasi Berbasis Kompetensi Guru Mata Pelajaran Matematika.*** Jakarta: Direktorat Sekolah Kegiatan Tingkat Pertama.
9. John L. Marks dkk, (1988). ***Metode Pengajaran Matematika untuk Sekolah Dasar, Edisi kelima terjemahan Bambang Sumantri.*** Jakarta: Erlangga.
10. Nurhadi, (2002). ***Pendekatan Kontekstual (Contextual Teaching and Learning (CTL).*** Jakarta: Deppennas, Dirjen Dikdasmen.
11. Solichan Abdullah, (1999/2000). ***Aritmetika Sosial (Model Pembinaan Penataran).*** Yogyakarta: PPPG Matematika.
12. Sukahar dan Siti M. Amin, (1996), ***Matematika 6.*** Jakarta: Balai Pustaka.
13. Supinah, (1995). ***Aritmetika Sosial (Makalah Pelatihan untuk Guru Pemandu PEQIP).*** Yogyakarta: PPPG Matematika.