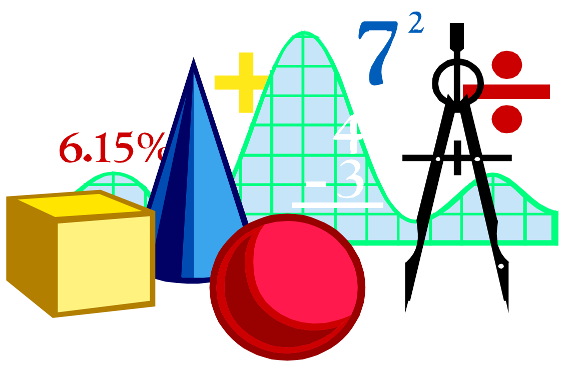
# STRATEGI PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMA
# SESUAI KURIKULUM 2004

disampaikan pada

**DIKLAT INSTRUKTUR / PENGEMBANG**
**MATEMATIKA SMA**
**JENJANG DASAR**

6 Agustus s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika Yogyakarta





DISAJIKAN OLEH
DRA. PUJI IRYANTI, M.Sc. Ed



**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL**
**DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH**
**PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU MATEMATIKA**
**2004**

## Daftar Isi

**Kompetensi yang akan dicapai:**

Memiliki kemampuan untuk mengembangkan kemampuan siswa dalam menggunakan konsep notasi sigma, barisan dan deret bilangan.

**Peta Bahan Ajar:**

| Kriteria Kinerja | Materi Pembelajaran |
|---|---|
| 1. Mampu menyebutkan pengertian tentang notasi sigma, pola barisan dan deret bilangan.<br>2. Mampu mengidentifikasi barisan aritmetika dan geometri<br>3. Mampu menyatakan jumlah dalam bentuk notasi sigma sebagai suatu fungsi. | 1. Notasi sigma<br>2. Pola barisan dan deret bilangan ( khususnya barisan aritmetika dan barisan geometri)<br>3. Barisan sebagai fungsi. |

# Bab I

# Pendahuluan

## A. Latar Belakang

Notasi Sigma menjadi dasar untuk penulisan barisan dan deret sehingga penting untuk menguasai materi ini serta sifat-sifatnya. Demikian pula, penting untuk menguasai materi barisan dan deret yang banyak diterapkan dalam kejadian di sekitar kita. Melihat perbedaan yang sangat besar antara pertumbuhan manusia dan pertambahan bahan makanan, Thomas Robert Malthus mengatakan bahwa pertumbuhan manusia berdasarkan kepada deret geometri (deret ukur) sebaliknya pertambahan bahan makanan berdasarkan kepada deret aritmetika ( deret hitung).

Jika Anda mencari alamat seseorang, tentu yang paling penting adalah nama jalan dan nomor rumahnya. Umumnya penomoran rumah yang menghadap ke jalan berdasarkan aturan salah satu sisi diberi nomor-nomor ganjil dan sisi yang lain diberi nomor-nomor genap. Jika dituliskan berurutan nomor-nomor itu akan membentuk barisan bilangan ganjil dan barisan bilangan genap yang termasuk dalam barisan aritmetika.

## B. Tujuan

Bahan ajar ini disusun dengan tujuan untuk meningkatkan wawasan dan kemampuan peserta diklat untuk mengembangkan ketrampilan siswa dalam menggunakan konsep Notasi sigma, Barisan dan Deret Bilangan.

## C. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas dalam bahan ajar ini adalah;

1. Notasi Sigma dan Sifat-sifatnya.
2. Barisan dan Deret:
   a. Barisan dan Deret Aritmetika
   b. Barisan dan Deret Geometri
3. Barisan sebagai fungsi.

Bab II

Notasi Sigma, Barisan dan Deret Bilangan I

## A. Notasi Sigma

***Seorang siswa SMA yang beberapa kali tidak mengerjakan PR akhirnya diberi sanksi oleh gurunya. Siswa itu disuruh menulis tangan kalimat " Saya tidak akan malas lagi mengerjakan PR Matematika" sebanyak 100 kali. Sungguh membosankan pekerjaan ini, kelihatan ringan tetapi tidak menyenangkan. Seandainya bisa ditulis dengan komputer, tentu pekerjaan ini akan mudah dan cepat selesai. Ternyata siswa itu dapat menyelesaikan tugas itu seketika sehingga gurunya kaget karena tidak menduga siswa itu menyelesaikan sanksi itu dengan cepat. Inilah yang ditulis oleh siswa tersebut:***

$\sum_{k=1}^{100} c$***, dengan c = Saya tidak akan malas lagi mengerjakan PR Matematika.***

Notasi sigma memang jarang Anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari, tetapi notasi ini akan banyak dijumpai penggunaannya dalam bagian Matematika yang lain. Jika Anda mempelajari Statistika maka Anda akan menjumpai banyak rumus-rumus yang digunakan memakai lambang notasi sigma, misalnya rumus mean, simpangan baku, ragam, korelasi, dan lain-lain. Di Kalkulus, pada waktu membicarakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan sumbu-sumbu koordinat, Anda akan menemui Jumlahan Riemann yang menggunakan notasi sigma untuk menyingkat penjumlahan yang relatif banyak. Ketika mempelajari Kombinatorik, Anda akan menemui bentuk notasi sigma dalam koefisien binomial.

Untuk mengawali bahasan mengenai notasi sigma, perhatikan jumlah 5 bilangan ganjil pertama berikut ini:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Pada bentuk tersebut 1 disebut suku ke-1, 3 disebut suku ke-2, 5 disebut suku ke-3, 7 disebut suku ke-4, dan 9 disebut suku ke-5. Ternyata suku-suku tersebut mengikuti suatu pola sebagai berikut:

Suku ke-1 = 1 = 2 (1) –1

Suku ke-2 = 3 = 2 (2) –1

Suku ke-3 = 5 = 2 (3) – 1

Suku ke-4 = 7 = 2 (4) –1

Suku ke-5 = 9 = 2 (5) –1

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pola dari suku-suku penjumlahan itu adalah 2k – 1 dengan k $\in \{1,2,3,4,5\}$. Untuk menyingkat penulisan penjumlahan seperti di atas digunakan huruf kapital Yunani $\Sigma$, dibaca notasi sigma yang diperkenalkan pertama kali tahun 1755 oleh Leonhard Euler. Selanjutnya bentuk penjumlahan di atas dapat ditulis dalam notasi sigma sebagai:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{k=1}^{5} (2k - 1)$$

Ruas kanan dibaca "sigma k = 1 sampai dengan 5 dari 2k-1". Batas bawah bentuk notasi sigma ini adalah k = 1 dan batas atas k = 5.

Secara umum bentuk notasi sigma didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}$$

**Contoh 1:**

Nyatakan $\sum_{k=1}^{6} (3k+1)^2$ dalam bentuk lengkap

Jawab: $\sum_{k=1}^{6} (3k+1)^2 = 4^2 + 7^2 + 10^2 + 13^2 + 16^2 + 19^2$

**Contoh 2:**

Hitunglah nilai $\sum_{k=1}^{4} (2k^2 - 1)$

Jawab: $\sum_{k=1}^{4}(2k^2-1)$ = 1+7+17+31 = 56

**Contoh 3**:

Nyatakan 3+5+7+9+11+13 dalam bentuk notasi sigma

Jawab: suku ke-1 = 3 = 2(1)+1

suku ke-2 = 5 = 2(2)+1

suku ke-3 = 7 = 2(3)+1, dan seterusnya sehingga

suku ke-6 = 13 = 2(6) +1

Dengan melihat pola suku-suku tersebut dapat disimpulkan bahwa suku-suku dalam penjumlahan itu mempunyai pola 2k+1.

Dengan demikian 3+5+7+9+11+13 = $\sum_{k=1}^{6}(2k+1)$

# Latihan 1

1. Tulislah bentuk-bentuk penjumlahan berikut dalam bentuk notasi sigma
   a. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12
   b. 2 + 4 + 8 + 16 + 32
   c. 2 - 4 + 8 - 16 + 32 - 64
   d. 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49
   e. 1 + 3 + 9 + 27 + 81
   f. –1 + 2 –3 + 4 –5 + 6 –7 + 8 –9 +10
   g. (1 x 2) + ( 3 x 4) + (5 x 6) + (7 x 8) + ( 9 x 10)
   h. $a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + a^5b^4 + a^6b^5$
   i. $b + ab^2 + a^2b^3 + a^3b^4 + a^4b^5 + a^5b^6$
2. Nyatakan notasi-notasi sigma berikut dalam bentuk lengkap

   a. $\sum_{k=1}^{5}(2k^2-1)$ c. $\sum_{k=1}^{5}(-1)^k 2k$ e. $\sum_{n=1}^{4}(n^2+2n+1)$

b. $\sum_{k=1}^{4} \frac{k(k+1)}{2}$ d. $\sum_{n=1}^{4}(n^3 - n^2)$ f. $\sum_{k=1}^{6}(k-1)k$

3. Diketahui:

   $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$, $a_6 = 13$.

   $b_1 = -2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 4$, $b_5 = 5$, $b_6 = 6$.

Hitunglah:

a. $\sum_{k=1}^{6} a_k$ f. $\sum_{k=1}^{6} b_k^2$

b. $\sum_{k=1}^{6} b_k$ g. $\sum_{k=1}^{6} (a_k + b_k)^2$

c. $\sum_{k=1}^{5} a_k b_k$ h. $\sum_{k=2}^{6} (a_k - b_k)^2$

d. $\sum_{k=1}^{5} a_k + b_k$ i. $\sum_{k=2}^{6} a_k^2 + b_k^2$

e. $\sum_{k=1}^{6} a_k^2$ j. $\sum_{k=2}^{6} a_k^2 - b_k^2$

Sifat-sifat Notasi Sigma

Untuk setiap bilangan bulat a, b dan n berlaku:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = c \sum_{k=a}^{b} f(k)$
3. $\sum_{k=a}^{b} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=a}^{b} f(k) + \sum_{k=a}^{b} g(k)$
4. $\sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$

5. $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

Bukti:

1. $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ suku}} = n\,(1) = n$

2. $\sum_{k=a}^{b} cf(k) = c\,f(a) + c\,f(a+1) + c\,f(a+2) + \ldots + c\,f(b)$

$$= c\,[f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b)] = c \sum_{k=a}^{b} f(k)$$

Tugas:

Buktikan sifat-sifat notasi sigma no. 3,4 dan 5

Batas bawah notasi sigma dapat dirubah dengan menggunakan sifat-sifat notasi sigma. Perhatikan contoh 4 dan contoh 5 berikut ini:

Contoh 4:

Nyatakan bentuk-bentuk notasi sigma berikut dengan batas bawah 1

a. $\sum_{k=7}^{13} k^2$ b. $\sum_{k=4}^{10} \frac{k-2}{k+3}$ c. $\sum_{k=3}^{8} 2k+3$

Jawab:

Dengan menggunakan sifat nomor 5, $\sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{k=m+p}^{n+p} f(k-p)$

a. $\sum_{k=7}^{13} k^2 = \sum_{k=7-6}^{13-6} (k+6)^2$

$$= \sum_{k=1}^{7} (k+6)^2$$

b. $\sum_{k=4}^{10} \frac{k-2}{k+3} = \sum_{k=4-3}^{10-3} \frac{(k+3)-2}{(k+3)+3}$

$$= \sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{k+6}$$

c. $\sum_{k=-3}^{8} 2k+3 = \sum_{k=-3+4}^{8+4} 2(k-4)+3$

$$= \sum_{k=1}^{12} 2k-5$$

Contoh 5:

Buktikan bahwa $\sum_{k=5}^{10} (2k-7)^2 = 4\sum_{k=1}^{6} k^2 + 4\sum_{k=1}^{6} k + 6$

Bukti:

$\sum_{k=5}^{10} (2k-7)^2 = \sum_{k=5-4}^{10-4} [2(k+4)-7]^2$ …………sifat nomor 5

$$= \sum_{k=1}^{6} (2k+8-7)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{6} (2k+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{6} (4k^2+4k+1)$$

$= \sum_{k=1}^{6} 4k^2 + \sum_{k=1}^{6} 4k + \sum_{k=1}^{6} 1$………sifat nomor 3

$= 4\sum_{k=1}^{6} k^2 + 4\sum_{k=1}^{6} k + 6$ ………sifat nomor 1 dan 2

Latihan 2

1. Nyatakan jumlah di bawah ini dengan bilangan 1 sebagai batas bawah

   a. $\sum_{k=5}^{14} (k-3)$ d. $\sum_{k=6}^{12} \frac{n-4}{2n+3}$

   b. $\sum_{k=-5}^{5} (k^2+1)$ e. $\sum_{a=8}^{12} (a-2)^2$

c. $\sum_{k=5}^{14}(b^2+b)$ f. $\sum_{k=-8}^{10} 4-k^2$

2. Buktikan

a. $\sum_{n=1}^{10}(2n-1)=\sum_{n=5}^{14}(2n-9)$

b. $\sum_{p=1}^{6}(p+4)^2=96+8\sum_{p=1}^{6}p+\sum_{p=1}^{6}p^2$

Bentuk ruas kanan nomor 2 di atas disebut bentuk monomial.

3. Nyatakan jumlah-jumlah di bawah ini sebagai jumlah monomial.

a. $\sum_{k=1}^{6}k^2-2k$ c. $\sum_{n=1}^{15}2^n-3n^2$

b. $\sum_{k=1}^{8}k^2-4k-5$ d. $\sum_{k=1}^{10}(4k-6)(3-k)$

B. Barisan dan Deret

1 . Barisan dan Deret Aritmetika

a. Barisan Aritmetika

*Iwan mencari rumah temannya di Jalan Gambir no.55. Setelah sampai di Jalan Gambir ia memperhatikan bahwa rumah-rumah yang terletak di sebelah kanan jalan adalah rumah-rumah dengan nomor urut genap 2, 4, 6, 8, dan seterusnya. Ke arah mana yang dituju Iwan untuk menemukan rumah temannya? Pada urutan ke berapa letak rumah itu?*

Nomor-nomor rumah di atas merupakan contoh barisan bilangan aritmetika. Barisan bilangan ini mempunyai selisih yang tetap antara dua suku yang berurutan. Pada barisan 1, 3, 5, 7, …, suku pertama adalah 1, suku kedua adalah 3, dan seterusnya. Selisih antara dua suku yang berurutan adalah 2. Barisan 2, 4, 6, 8, …, juga mempunyai selisih dua suku yang berurutan selalu tetap yang besarnya 2.

b. Rumus suku Ke-n Barisan Aritmetika

Pada barisan aritmetika dengan bentuk umum $u_1, u_2, u_3, \ldots$ dengan $u_1$ adalah suku pertama, $u_2$ adalah suku ke-2, $u_3$ adalah suku ke-3 dan seterusnya. Selisih antara dua suku berurutan disebut juga beda dan diberi notasi b, sehingga $b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots = u_n - u_{n-1}$

Misalkan suku pertama $u_1$ dinamakan a dan beda antara 2 suku berurutan adalah b, maka:

$u_1 = a$

$u_2 - u_1 = b \Rightarrow u_2 = u_1 + b = a + b = a + (2-1)b$

$u_3 - u_2 = b \Rightarrow u_3 = u_2 + b = a + 2b = a + (3-1)b$

$u_4 - u_3 = b \Rightarrow u_4 = u_3 + b = a + 3b = a + (4-1)b$

$u_5 - u_4 = b \Rightarrow u_5 = u_4 + b = a + 4b = a + (5-1)b$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas kita dapat menyimpulkan rumus umum suku ke-n adalah:

$\boxed{u_n = a + (n-1)b}$ dengan $u_n$ = suku ke-n

a = suku pertama dan b = beda

contoh 6:

Tentukan suku ke-35 dari barisan 3, 7, 11, 15,…

Jawab:

$U_1 = a = 3$, $b = u_2 - u_1 = 7 - 3 = 4$, $n = 35$

Dengan mensubstitusikan unsur-unsur yang diketahui ke

$u_n = a + (n-1)b$ diperoleh $u_{35} = 3 + (35-1)4 = 139$

Jadi suku ke-35 adalah 139.

contoh 7:

a. Carilah rumus suku ke-n barisan 60, 56, 52, 48,…

b. Suku ke berapakah dari barisan di atas yang nilainya adalah 16?

Jawab:

$U_1 = a = 60$, $b = u_2 - u_1 = 56 - 60 = -4$

a. $u_n = a + (n-1)b$

$= 60 - 4(n-1) = 64 - 4n$

b. $u_n = 64 - 4n$

$16 = 64 - 4n$

$4n = 48 \Leftrightarrow n = 12$

contoh 8:

Pada suatu barisan aritmetika suku ke-10 adalah 41 dan suku ke-5 adalah 21. Tentukan suku ke-125

Jawab:

$U_{10} = a + (10-1)b = a + 9b = 41$

$U_5 = a + (5-1)b \; \underline{= a + 4b = 21} \; -$

$5b = 20$

$b = 4 \Rightarrow a = 5$

$U_{125} = a + (125-1)4 = 5 + 124(4) = 501$

Tugas:

Misal $u_1 = a$, $u_2 = a + b$, $u_3 = a + 2b$, dan seterusnya.

a. Jumlahkan setiap 2 suku ganjil kemudian dibagi 2 atau dikalikan 1/2, misal $\frac{1}{2}(u_1 + u_3)$, $\frac{1}{2}(u_1 + u_5)$, dan seterusnya selanjutnya bandingkan dengan suku-suku yang lain. Apa yang Anda dapatkan?

b. Jumlahkan setiap 2 suku genap kemudian dibagi 2 atau dikalikan 1/2 , misal $\frac{1}{2}(u_2 + u_4)$, $\frac{1}{2}(u_2 + u_6)$, dan seterusnya selanjutnya bandingkan dengan suku-suku yang lain. Apa yang Anda dapatkan?

Latihan 3

1. Carilah rumus suku ke-n dari setiap barisan berikut:

a. 2, 5, 8, 11,… d. 53, 48, 43, 38,…

b. 8, 1, -6, -13, … e. –21, -16, -11, -6, …

c. 13, 15, 17, 19, … f. 10, $9\frac{1}{4}$, $8\frac{1}{2}$, $7\frac{3}{4}$, …

2. Tentukan suku yang diminta dalam setiap barisan aritmetika berikut

a. 1, 7, 13, 19, … suku ke-45 d. 80, 72, 64, 56, … suku ke-30

b. 6, 3, 0, -3, … suku ke- 28 e. $3\frac{1}{2}$, 5, $6\frac{1}{2}$, 8,… suku ke-24

c. 5, 9, 13, 17, … suku ke-50 f. –65, -61, -57, -53,… suku ke-37

3. Suku ke-10 suatu barisan aritmetika adalah 41. Jika suku ke-7 adalah 29, tentukan suku ke- 50

4. Dari suatu barisan aritmetika, $u_2 + u_7 = 26$ dan $u_3 + u_5 = 22$. Tentukan suku ke-100

5. Diketahui barisan aritmetika 64, 61, 58, 55,…

a. Suku keberapakah yang bernilai 26?

b. Tentukan suku negatifnya yang pertama

6. Diketahui barisan bilangan asli kurang dari 125. Tentukan banyak bilangan yang :

a. habis dibagi 2

b. habis dibagi 5

c. habis dibagi 2 tetapi tidak habis dibagi 5

7. Diantara bilangan-bilangan 8 dan 173 disisipkan 32 buah bilangan sehingga terjadi barisan aritmetika. Tentukan

a. beda barisan itu

b. rumus suku ke-n

c. Deret Aritmetika

Tentu Anda sudah mengetahui cerita tentang matematikawan Carl Friederich Gauss. Ketika masih di sekolah dasar ia diminta gurunya untuk menjumlahkan 100 bilangan asli yang pertama. Teknik menghitung Gauss kecil sederhana tetapi tidak diragukan lagi keefektifannya. Ia memisalkan S adalah jumlah 100 bilangan asli yang pertama seperti di bawah ini.

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$$

Kemudian ia menulis penjumlahan itu dengan urutan suku-suku terbalik.

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 1$$

Selanjutnya ia menjumlahkan kedua deret.

$$2\,S = 101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101$$

Karena banyak suku dalam deret itu ada 100, maka penjumlahan itu dapat juga ditulis sebagai:

$$2\,S = 100\,(101) = 10100 \Leftrightarrow S = 5050$$

Teknik menghitung Gauss ini yang diikuti selanjutnya untuk mendapatkan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan aritmetika. Dari barisan aritmetika $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ diperoleh deret aritmetika $u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \ldots$ Bila jumlah n suku yang pertama dari suatu deret aritmetika dinyatakan dengan $S_n$ maka

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$$

Misalkan $U_n = k$, maka

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + k$$

$$S_n = a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + \ldots + (k-b) + k \quad \ldots(1)$$

Jika urutan penulisan suku-suku dibalik maka diperoleh

$$S_n = k + (k-b) + (k-2b) + (k-3b) + \ldots + (a+b) + a \quad \ldots.(2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat:

$$2\,S_n = \underbrace{(a+k) + (a+k) + (a+k) + (a+k) + \ldots + (a+k) + (a+k)}_{\text{n suku}}$$

$$= n\,(a+k) = n\,[\,2a + (n-1)\,b]$$

Jadi $S_n = \frac{1}{2}\,n\,(a+k)$

atau $\boxed{S_n = \frac{1}{2} n (a + u_n) = \frac{1}{2} n [(2a + (n-1)b ]}$

dengan a = suku pertama, $U_n$ = suku ke-n, b = beda

Jika ditulis dalam bentuk notasi sigma, jumlah n suku pertama deret aritmetika dinyatakan sebagai $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{n=1}^{n} a + (n-1)b}$

Dengan demikian jumlah n suku pertama dan n –1 suku pertama deret aritmetika dapat dinyatakan sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1}$$

Dengan mengurangkan $S_n$ dengan $S_{n-1}$ terlihat dengan jelas bahwa

$$\boxed{U_n = S_n - S_{n-1}}$$

Tugas:

Tunjukkan bahwa jumlah n suku pertama deret aritmetika merupakan fungsi kudrat, yaitu $S_n = An^2 + Bn$ dan rumus suku ke n barisan aritmetika adalah $U_n = 2An + (B – A)$

**Contoh 9:**

Diketahui deret 1+ 6 + 11 + 16 + …. Tentukan

a. bentuk notasi sigma jumlah n suku pertama deret tersebut

b. rumus jumlah n suku yang pertama

c. jumlah 25 suku yang pertama

jawab:

a. $1+ 6 + 11 + 16 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} (5k-4)$

b. $S_n = \frac{1}{2} n [(2a + (n-1)b ]$

$= \frac{1}{2} n\,[2 + (n-1)\,5] = \frac{5}{2} n^2 - \frac{3}{2} n$

c. $S_{25} = \frac{5}{2}(25)^2 - \frac{3}{2}(25) = 1525$

**Contoh 10:**

Hitunglah jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6

Jawab:

Jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah deret

$12 + 18 + 24 + 30 + \ldots + 96$

$u_n = 96$ disubstitusikan ke $u_n = a + (n - 1)b$

Jadi $96 = 12 + (n - 1)6$. Dengan menyelesaikan persamaan ini didapat $n = 15$

Selanjutnya $n = 15$ dan $u_n = 96$ disubstitusi ke $S_n = \frac{1}{2} n(a + u_n)$ sehingga:

$S_{15} = \frac{1}{2}(15)(12 + 96) = 810$

Jadi jumlah bilangan asli antara 10 sampai 100 yang habis dibagi 6 adalah 810.

**Contoh 11:**

Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika ditentukan oleh rumus

$S_n = 2n^2 + 5n$. Tentukan suku ke-n.

Jawab:

$U_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 5n - \{2(n-1)^2 + 5n\} = 4n + 3$

Jadi rumus suku ke-n adalah $U_n = 4n + 3$

## Latihan 4

1. Hitunglah jumlah 30 suku yang pertama untuk tiap deret berikut ini

   a. $2 + 5 + 7 + 9 + \ldots$ c. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3, 3\frac{3}{4}, \ldots$

   b. $-30 -27 -24 -21 - \ldots$ d. $7\frac{1}{2}, 6, 4\frac{1}{2}, 3, \ldots$

2. Hitunglah jumlah tiap deret berikut

   a. $\sum_{k=1}^{10}(2k-1)$ c. $\sum_{n=1}^{25}(3n+2)$

   b. $\sum_{k=1}^{14}(k+3)$ d. $\sum_{p=1}^{20}(5-2p)$

3. Hitunglah n jika ditentukan

   a. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = 210$ b. $84 + 80\frac{1}{2} + 77 + 73\frac{1}{2} + \ldots + n = 0$

4. Hitunglah jumlah semua bilangan asli

   a. antara 1 dan 200 yang habis dibagi 4

   b. antara 1 dan 200 yang habis dibagi 4 tetapi tidak habis dibagi 5

5. Diketahui jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika adalah

   $S_n = \frac{n}{2}(3n + 5)$. Tentukan :

   a. rumus suku ke-n

b. suku pertama dan beda

6. Tiga bilangan merupakan barisan aritmetika. Jika bilangan yang ketiga adalah 12 dan hasil kali ketiga bilangan itu –120 . Tentukan bilangan itu.

2. Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

*Alkisah di negeri Antah Berantah seorang raja akan memberikan hadiah kepada juara catur di negeri itu. Ketika raja bertanya hadiah apa yang diinginkan oleh Abu, sang juara, menjawab bahwa dia menginginkan hadiah beras yang jumlahnya adalah banyak beras di persegi terakhir papan catur yang diperoleh dari kelipatan beras 1 kg di persegi pertama, 2 kg di persegi kedua, 4 kg dipersegi ketiga, dan seterusnya. Raja yang mendengar permintaan itu langsung menyetujui karena Raja berfikir bahwa hadiah yang diminta itu begitu sederhana. Apakah memang hadiah itu begitu sederhana dan berapa kg beras sesungguhnya jumlah hadiah Abu*?

Perhatikan bahwa barisan 1, 2, 4, 8 , 16, …mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan. Perbandingan yang tetap itu disebut *rasio* dan dilambangkan dengan r. Pada barisan ini perbandingan dua suku yang berurutan adalah r = 2 . Barisan yang mempunyai perbandingan yang tetap antara dua suku berurutan disebut **barisan geometri**. Secara umum dapat dikatakan:

Suatu barisan $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_{n-1}, u_n$, disebut **barisan geometri** jika $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ = konstan = r.

**b. Rumus Suku Ke-n Barisan Geometri**

Jika suku pertama $u_1$ = a dan perbandingan dua suku yang berurutan disebut rasio r, maka

$$\frac{u_2}{u_1} = r \Leftrightarrow u_2 = u_1 r = ar$$

$$\frac{u_3}{u_2} = r \Leftrightarrow u_3 = u_2 r = ar^2$$

$$\frac{u_4}{u_3} = r \Leftrightarrow u_4 = u_3 r = ar^3$$

$$\frac{u_5}{u_4} = r \Leftrightarrow u_5 = u_4 r = ar^4$$

Dengan memperhatikan pola suku-suku di atas diperoleh rumus umum suku ke-n barisan geometri

$$\boxed{u_n = ar^{n-1}}$$

$u_n$ = suku ke-n, a = suku pertama, r = rasio

Tugas:

Perhatikan suku –suku barisan geometri $u_1$ = a, $u_2$ =ar, $u_3$ = $ar^2$, dan seterusnya.Kalikan setiap 2 suku ganjil misal $u_1$ $u_3$, $u_1$ $u_5$ , dan seterusnya selanjutnya kuadratkan suku-suku genap. Bandingkan kedua hasil tadi .Apa yang Anda dapatkan?

Contoh 12:

Suku ketiga dan suku kelima suatu barisan geometri berturut-turut 27 dan 3. Jika rasio barisan ini bilangan positif, tentukan:

a. rasio dan suku pertama

b. rumus suku ke-n dan suku ke-8

Jawab :

a. $\frac{u_5}{u_3} = \frac{ar^4}{ar^2} = \frac{3}{27} \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow r = \frac{1}{3}$

$ar^2 = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{9} a = 27 \Leftrightarrow$ a = 243

Jadi rasio deret itu $r = \frac{1}{3}$ dan suku pertama a = 243

b. $u_n = ar^{n-1}$

$= 243\ (\frac{1}{3})^{n-1} = 3^5\ (3^{-1})^{n-1} = 3^{6-n}$

$u_8 = 3^{6-8} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

Rumus suku ke-n adalah $u_n = 3^{6-n}$ dan suku ke-8 adalah $\frac{1}{9}$

Contoh 13:

Tiga bilangan membentuk barisan geometri yang hasil kalinya 1000. Jika jumlah tiga bilangan itu 35, tentukan bilangan-bilangan tersebut.

Jawab:

Tiga bilangan itu dimisalkan sebagai $\frac{p}{r}$, p , pr. Hasil kali tiga bilangan itu $p^3 = 1000 \Leftrightarrow p = 10$. Jumlah tiga bilangan $\frac{p}{r} + p + pr = 35$

$\Leftrightarrow \frac{10}{r} + 10 + 10\ r = 35$

$\Leftrightarrow 10\ r^2 - 25r + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (2r - 1)(r - 2) = 0$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$ atau $r = 2$

Untuk $r = \frac{1}{2}$ dan $p = 10$ barisan adalah 20, 10, 5

Untuk $r = 2$ dan $p = 10$ barisan adalah 5, 10, 20

## Latihan 5

1. Tentukan rasio, rumus suku ke-n dan suku ke sepuluh tiap barisan geometri berikut:

   a. 1, 4, 16, 64, … d. 4, -8, 16, -32, …

   b. 2, 6, 18, 54, … e. 10, -5, $2\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{4}$, …

   c. 32, 16, 8, 4, … f. $\sqrt{3}$, 6, $12\sqrt{3}$, 72, …

2. Suku pertama suatu barisan geometri adalah 16, sedangkan suku ke empatnya sama dengan 128. Tentukan rasio, dan suku ke-8

3. Dari suatu barisan geometri diketahui $u_1 + u_6 = 244$ dan $u_3 . u_4 = 243$. Tentukan rasio dan $u_2$

4. Tiga bilangan membentuk barisan geometri naik yang jumlahnya 93 dan hasil kalinya 3375. Tentukan barisan tersebut.

5. Harga suatu mesin menyusut setiap tahun 10% dari harga pada permulaan tahun. Jika mesin itu dibeli seharga Rp. 15.000.000,-, berapakah harga mesin itu setelah 5 tahun?

6. Sebidang tanah berharga Rp. 20.000.000,-. Setiap tahun harga tanah itu naik 5 %. Berapakah harga tanah itu pada tahun ke-8?

7. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku tengah dikurangi 5 maka terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

8. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jumlah ketiga bilangan itu sama dengan 12. Jika bilangan ke-3 ditambah dengan 2 maka terbentuk suatu barisan geometri. Tentukan bilangan-bilangan tersebut.

## c. Deret Geometri

*Banyak orang di sekitar kita yang bekerja dalam bisnis Multi Level Marketing (MLM) seperti Sophie Martin, Avon, Sara Lee, dan sebagainya. Sebagai contoh, seseorang yang membangun bisnis ini mengembangkan bisnisnya dengan mencari 2 agen di bawahnya yang memasarkan produk. Masing-masing agen itu juga mencari 2 agen lagi dan seterusnya. Keuntungan yang diperoleh oleh orang pertama sangat tergantung dari kerja para agen di bawahnya untuk memasarkan produk MLM itu. Semakin banyak orang yang terlibat untuk memasarkan produk itu akan menambah banyak pendapatan dari orang pertama. Bagaimanakah menyatakan banyak orang yang terlibat dalam bisnis ini?*

Jumlahan 1 + 2 + 4 + 8 + … merupakan salah satu contoh deret geometri. Jika n suku pertama barisan geometri $u_1, u_2, u_3, u_4, ..., u_n$ dijumlahkan maka diperoleh deret geometri $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$ $= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} ar^{n-1}$ .

Rumus umum jumlah n suku deret geometri dapat ditentukan sebagai berikut:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_n$$

$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1)}$$

Masing-masing ruas pada persamaan (1) dikalikan dengan r sehingga didapat

$$r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(2)}$$

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2), diperoleh

$$S_n - r\,S_n = a - ar^n$$

$\Leftrightarrow S_n (1 - r) = a(1 - r^n)$

$\Leftrightarrow \; S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ atau $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$

Dengan demikian jumlah n suku pertama deret geometri adalah:

| | |
|---|---|
| $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{(1-r)}$ | berlaku untuk r < 1 |
| $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ | berlaku untuk r > 1 |

**Contoh 14:**

Tentukan jumlah 5 suku pertama deret 32 + 16 + 8 + 4+…

Jawab:

$a = 32, \; r = \dfrac{1}{2}$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{32[1-(\frac{1}{2})^5]}{(1-\frac{1}{2})} = 62$$

Jadi jumlah 5 suku pertama deret tersebut adalah 62

**Contoh 15:**

Tentukan nilai n jika $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 510$

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n = 510$$

$a = 2, r = 2$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$\Rightarrow 510 = \frac{2(2^n - 1)}{(2 - 1)} = 2^{n+1} - 2$$

$$\Leftrightarrow 512 = 2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad n = 8$$

**Latihan 6**

1. Hitunglah jumlah 10 suku pertama tiap deret geometri berikut

   a. $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots$ d. $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots$

   b. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ e. $128 - 64 + 18 - 54 + \ldots$

   c. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \ldots$ f. $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \ldots$

2. Hitunglah jumlah deret geometri berikut

   a. $2 + 4 + 8 + + \ldots + 512$ c. $1 + 5 + 25 + 125 + \ldots + 3125$

   b. $243 + 81 + 27 + \ldots + \frac{1}{3}$ d. $1 + 1{,}1 + (1{,}1)^2 + (1{,}1)^3 + \ldots + (1{,}1)^{10}$

3. Dari suatu deret geometri diketahui $u_9 = 128$ dan $u_4 = -4$. Hitunglah $S_{10}$

4. Dari suatu deret geometri diketahui $S_2 = 4$ dan $S_4 = 40$.Tentukan

   a. rasio dan suku pertama deret tersebut

   b. jumlah 8 suku pertama

5. Jumlah n suku pertama suatu deret geometri ditentukan dengan rumus

$S_n = 8 - 2^{3-n}$. Tentukan

a. suku pertama dan rasio deret itu

b. jumlah lima suku yang pertama

6. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 1 m di atas permukaan lantai. Setiap kali sesudah jatuh mengenai lantai bola dipantulkan lagi mencapai $\frac{3}{4}$ dari tinggi sebelumnya. Hitunglah panjang seluruh lintasan yang ditempuh bola itu selama enam pantulan yang pertama.

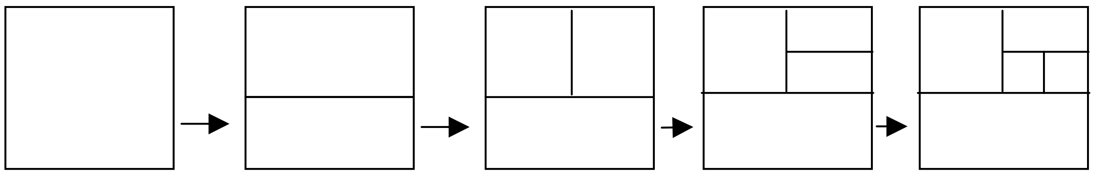
7. Seutas tali dipotong menjadi 6 ruas dan panjang masing-masing potongan itu membentuk barisan geometri. Jika potongan tali yang paling pendek sama dengan 3 cm dan potongan tali yang paling panjang adalah 96 cm, hitunglah panjang tali keseluruhan.

8. Jumlah penduduk suatu kota setiap 4 tahun menjadi lipat dua dari jumlah sebelumnya. Jika jumlah penduduk pada tahun 1997 adalah 200.000 orang, berapakah jumlah penduduk kota itu pada tahun 2021?

9. Beni menyimpan uang di bank dengan bunga majemuk ( bunga diperhitungkan dari jumlah uang sebelumnya) sebesar 8 % per tahun. Jika uang yang disimpan pada tahun 1996 adalah Rp. 10.000.000,- berapakah jumlah uang Budi pada tahun 2003?

d. Deret Geometri Tak Hingga

Untuk membahas masalah deret geometri tak hingga dapat menggunakan benda yang sudah dikenal siswa. Sebuah kertas yang berbentuk persegi dibagi menjadi dua bagian. Salah satu bagian kertas itu kemudian dibagi lagi menjadi dua bagian. Selanjutnya bagian terkecil dari kertas itu dibagi lagi menjadi dua bagian dan seterusnya seperti digambarkan di bawah ini:




Secara teoritis proses pembagian ini dapat diulangi terus menerus sampai tak berhingga kali. Pada pembagian yang pertama diperoleh $\frac{1}{2}$ bagian, yang ke-2 diperoleh $\frac{1}{4}$ bagian , yang ke-3 diperoleh $\frac{1}{8}$ bagian dan seterusnya sampai tak berhingga kali. Tampak jelas bahwa jumlah dari seluruh hasil pembagian sampai tak berhingga kali adalah 1 bagian.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

Proses tadi menjelaskan pengertian jumlah deret geometri tak hingga yang bisa diperagakan secara sederhana. Untuk penjelasan secara teoritis perhatikan jumlah n suku pertama deret geometri $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$. Jika suku-suku deret itu bertambah terus maka deret akan menjadi deret geometri tak hingga. Dengan demikian jumlah deret geometri menjadi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(1-r)} r^n$$

$$= \frac{a}{(1-r)} - \frac{a}{(1-r)} \lim_{n\to\infty} r^n$$

Terlihat jelas bahwa nilai $S_n$ sangat dipengaruhi oleh nilai $\lim_{n\to\infty} r^n$. Jika

1) $-1 < r < 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n$ akan menjadi nol sehingga deret tak hingga itu mempunyai jumlah $\boxed{S_\infty = \frac{a}{(1-r)}}$

   Deret geometri tak hingga yang mempunyai jumlah disebut **konvergen** atau mempunyai **limit jumlah**.

2) $r < -1$ atau $r > 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n = \pm\infty$ sehingga deret tak hingga itu tidak mempunyai limit jumlah. Deret yang seperti ini disebut **divergen.**

**Contoh 16:**

Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \ldots$

Jawab:

$a = 4$ dan $r = -\frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a}{(1-r)} = \frac{4}{(1+\frac{1}{2})} = \frac{8}{3}$$

Jadi jumlah deret geometri tak hingga itu adalah $\frac{8}{3}$.

## Latihan 7

1. Hitunglah jumlah tiap deret geometri tak hingga berikut ini

a. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ....$ b. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + ... \ldots$

c. $9 - 6 + 4 - \frac{8}{3} + \ldots$ d. $10 - 5 + 2{,}5 - 1{,}25 + \ldots$

2. Hitunglah

a. $\lim_{n\to\infty} (4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + ...)$ b. $\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k})$

3. Deret geometri tak hingga suku pertamanya 3. Deret itu konvergen dengan jumlah $\frac{9}{2}$. Tentukan suku ketiga dan rasio deret tersebut.

4. Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah $(4 + 2\sqrt{2})$ sedangkan rasionya adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Tentukan suku pertama deret tersebut.

5. Jumlah suku-suku nomor ganjil dari suatu deret geometri tak hingga adalah 18. Deret itu sendiri mempunyai jumlah 24. Tentukan rasio dan suku pertama deret geometri itu.

6. Jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{8}{25}x^3 - ...$ sama dengan $\frac{1}{3}$. Carilah nilai x.

7. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah a, sedangkan rasionya adalah r = ${}^2\log(x-3)$. Carilah batas-batas nilai x sehingga deret geometri itu konvergen.

8. Sebuah bola tenis dijatuhkan ke lantai dari suatu tempat yang tingginya 2 m. Setiap kali setelah bola itu memantul akan mencapai $\frac{2}{3}$ dari tinggi yang dicapai sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan bola sampai bola itu berhenti.

## C. Barisan Sebagai Fungsi

Untuk menentukan suku-suku suatu barisan kita melihat keteraturan pola dari suku-suku sebelumnya. Salah satu cara untuk menentukan rumus umum suku ke-n suatu barisan adalah dengan memperhatikan selisih antara dua suku yang berurutan. Bila pada satu tingkat pengerjaan belum diperoleh selisih tetap, maka pengerjaan dilakukan pada tingkat berikutnya sampai diperoleh selisih tetap. Suatu barisan disebut **berderajat satu (linear)** bila selisih tetap diperoleh dalam satu tingkat pengerjaan, disebut **berderajat dua** bila selisih tetap diperoleh dalam dua tingkat pengerjaan dan seterusnya.

Bentuk umum dari barisan-barisan itu merupakan fungsi dalam n sebagai berikut:

Selisih tetap 1 tingkat $\longrightarrow$ $U_n = an + b$

Selisih tetap 2 tingkat $\longrightarrow$ $U_n = an^2 + bn + c$

Selisih tetap 3 tingkat $\longrightarrow$ $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Perlu diperhatikan bahwa a dan b pada fungsi ini **tidak sama** dengan a = suku pertama dan b = beda pada suku-suku barisan aritmetika.

Untuk memahami pengertian barisan berderajat satu, berderajat dua, dan seterusnya perhatikan contoh berikut:

- Barisan 2, 5, 8, 11, … disebut barisan berderajat satu karena selisih tetap diperoleh pada satu tingkat penyelidikan.

2 5 811, ...

selisih tet 3 3 3 3

- Barisan 5, 8, 13, 20, 29, … disebut barisan berderajat dua karena selisih tetap diperoleh pada dua tingkat penyelidikan.

5 8 13 20 29

3 5 7 9

s 2 t 2 = 2

- Barisan 2, 5, 18, 45, 90, … disebut barisan berderajat tiga karena selisih tetap diperoleh pada tiga tingkat penyelidikan.

25 18 45 90

3 13 27 45

10 14 18

44 selisih tetap = 4

Untuk menentukan rumus suku ke-n masing-masing barisan itu dilakukan dengan cara sebagai berikut:

**1. Barisan Linear ( Berderajat Satu)**

Bentuk umum $U_n$ = an + b. Dengan demikian $u_1$ = a + b, $u_2$ = 2a + b, $u_3$ = 3a + b, $u_4$ = 4a + b, dan seterusnya.

(i) ,2a + b ,3a + b , 4a + b, …

(ii) $\boxed{a}$ a a

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 8, 11, …dapat ditentukan dengan cara:

2 5 811, …

(i)

(ii) 3 3 3

(ii) a = 3 $\rightarrow$ (i) a+ b = 2

3 + b = 2 $\rightarrow$ b = -1 , sehingga **$u_n$ = 3n –1**

**2. Barisan Berderajat Dua**

Bentuk umum $U_n = an^2 + bn + c$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c$, $u_2 = 4a + 2b + c$, $u_3 = 9a + 3b + c$, $u_4 = 16a + 4b + c$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(i) $\boxed{a + b + c}$ , 4a + 2b + c , 9a + 3b + c , 16a + 4b + c, …

(ii) $\boxed{3a + b}$ 5a + b 7a + b

(iii) $\boxed{2a}$ 2a

Rumus umum suku ke-n barisan 5, 8, 13, 20, 29, … dapat ditentukan dengan cara:

(i) 5 8 13 20 29

(ii) 3 5 7 9

(iii) 2 2 2

(iii) 2a = 2

a = 1 $\rightarrow$ (ii) 3a+ b = 3

b = 0 $\rightarrow$ (i) a + b + c = 5

c = 4, sehingga **$U_n = n^2 + 4$**

### 3. Barisan Berderajat Tiga

Bentuk umum $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Dengan demikian $u_1 = a + b + c + d$, $u_2 = 8a + 4b + 2c + d$, $u_3 = 27a + 9b + 3c + d$, $u_4 = 64a + 16b + 4c + d$, dan seterusnya. Identifikasi selisih tetapnya adalah sebagai berikut:

(i) $\boxed{a + b + c + d}$, $8a + 4b + 2c + d$, $27a + 9b + 3c + d$, $64a + 16b + 4c + d$

(ii) $\boxed{7a + 3b + c}$ $\quad 19a + 5b + c \quad 37a + 7b + c$

(iii) $\boxed{12a + 2b}$ $\quad 18a + 2b$

(iv) $\boxed{6a}$

Rumus umum suku ke-n barisan 2, 5, 18, 45, 90, … dapat ditentukan dengan cara:

(i) 2 5 18 45 90

(ii) 3 13 27 45

(iii) 10 14 18

(iv)

Dengan menyelesaikan persamaan (iv), (iii), (ii) dan (i) seperti yang dilakukan pada barisan berderajat satu maupun barisan berderajat dua diperoleh

$a = \frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = -\frac{14}{3}$ dan $d = 5$ sehingga rumus suku ke-n

$$U_n = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{14}{3}n + 5$$

$$= \frac{1}{3}(2n^3 + 3n^2 - 14n + 15)$$

## Latihan 8

1. Tentukan rumus suku ke-n untuk tiap-tiap barisan berikut ini:

   a. 5, 9, 13, 17, …d. 2, 5, 12, 23, …

   b. 6, 11, 16, 21, …e. 1, 9, 27, 61, …

   c. 1, 6, 13, 22, …f. 2, 10, 28, 68, 120,…

2. Tentukan rumus suku ke-n

   a. barisan bilangan segi tiga 1, 3, 6, 10, 15, …

   b. barisan bilangan persegi panjang 2, 6, 12, 20, …

   c. barisan bilangan balok 6, 24, 60, 120, …

## D. Lembar Kerja

### Lembar Kerja 1

| | |
|---|---|
| Materi | : Barisan Aritmetika |
| Kompetensi dasar | : Menentukan rumus ke-n barisan aritmetika |
| Waktu | : |
| Bahan/ alat | : gelas aqua plastik ( bisa diganti wadah plastik yang bisa ditumpuk atau kursi plastik yang bisa ditumpuk), garisan, pita ukuran. |

**Langkah-langkah:**

1. Ukur tinggi gelas aqua plastik dengan garisan atau pita ukuran. Ambil satu lagi gelas plastik, kemudian tumpukkan di atas yang pertama. Lakukan lagi sampai 4 kali. Selanjutnya isilah tabel berikut berdasarkan hasil pengukuran:

| Tumpukkan gelas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tinggi (bulatkan dalam cm) | | | | | |

   Apakah tinggi tumpukkan gelas itu mempunyai pola tertentu? Jelaskan hasil pengamatanmu.

2. Dari hasil pengamatan tadi, tentukan rumus tinggi n tumpukkan gelas. Berdasarkan rumus yang sudah diperoleh tentukan tinggi 20 tumpukkan gelas.

## Lembar Kerja 2

Materi : Deret Geometri Tak Hingga

Kompetensi Dasar : Menentukan jumlah deret geometri tak hingga

Waktu :

Bahan/ alat : kertas dan gunting

**Langkah- langkah:**

1. Guntinglah sehelai kertas berbentuk persegi secara horizontal atau vertikal menjadi 2 bagian yang sama. Masing-masing bagian ini disebut separuh. Jika bagian itu dinyatakan dengan bilangan ditulis sebagai …. (isi titik-titik ini). Tuliskan bilangan ini di bagian kertas yang bersesuaian.

2. Ambil separuh bagian tadi dan gunting lagi seperti di atas menjadi 2 bagian yang sama. Masing-masing bagian ini jika dinyatakan dengan bilangan ditulis sebagai ……( isi titik-titik ini). Tuliskan bilangan ini di bagian kertas yang bersesuaian.

3. Ulangi lagi langkah 2 sampai empat kali lagi. Semua potongan kertas tidak boleh hilang. Gabungkan lagi tiap-tiap potongan kertas hasil guntingan sehingga membentuk persegi lagi. Nyatakan dengan operasi bilangan hasil penggabungan potongan-potongan kertas tersebut.

4. Tuliskan hasil ( kesimpulan) yang diperoleh.

## Lembar Kerja 3

Materi : Barisan Sebagai Fungsi

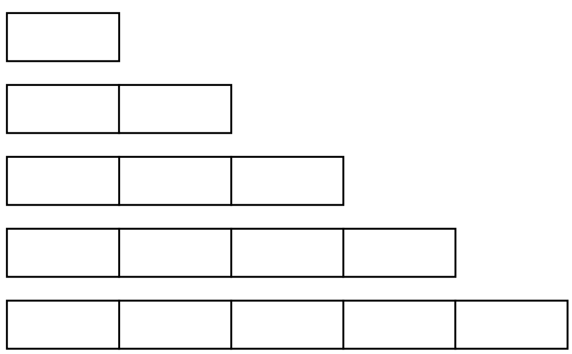
Kompetensi Dasar : Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan sebagai fungsi

Waktu :

Bahan/ alat : -

**Langkah-langkah:**

1. Perhatikan semua persegi panjang di bawah ini, kemudian lengkapi tabel berikut:



| Banyak persegi panjang kecil | Banyak seluruh persegi panjang |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

2. Perhatikan pola bilangan yang Anda dapat. Jika ada n persegi panjang kecil berapa jumlah seluruh persegi panjang? Jika ada 20 persegi panjang kecil berapa jumlah seluruh persegi panjang?

# Lembar Kerja 4:

Materi : Barisan Sebagai Fungsi

Kompetensi Dasar : Menyatakan rumus suku ke-n suatu barisan sebagai fungsi

Waktu :

**Bagian A:**

1. Tentukan jawaban dari:

   $3^2 - 1 = ....$

   $5^2 - 1 = ....$

   $7^2 - 1 = ....$

   $9^2 - 1 = ....$

2. Keempat jawaban di atas semuanya bilangan genap. Apalagi kesamaan dari ke empat bilangan itu?
3. Tulislah lagi tiga barisan berikut. Apa yang dapat Anda perhatikan? Apakah semua jawaban masih genap? Apakah ketiga bilangan berikut masih mempunyai kesamaan dengan empat bilangan sebelumnya?

**Bagian B:**

1. Tentukan bilangan yang diberi tanda titik-titik:

   $1^2 + 2^2 + 2^2 = ....^2$

   $2^2 + 3^2 + 6^2 = ....^2$

   $3^2 + ...^2 + 12^2 = 13^2$

   $4^2 + ...^2 + 20^2 = ....^2$

2. Pelajari pola-pola bilangan di atas tersebut dan lengkapkan dua baris berikutnya. Teliti apakah baris-baris yang Anda tambahkan memenuhi pola baris sebelumnya. Bagaimana bentuk umum pola tersebut?

# Daftar Pustaka

Jacobs, Harold R. 1970. *Mathematics A Human Endeavor*. San Fransisco: W.H. Freeman Company.

Marsudi Raharjo. 2001. *Notasi Sigma dan Induksi Matematika*. Yogyakarta: PPPG Matematika.

Nasoetion, Andi Hakim. 1994. *Matematika I untuk Sekolah Menengah Umum Kelas I*. Jakarta: Balai Pustaka.

Posamentier, Alfred S- Stepelmen, Jay. 1999. *Teaching Secondary School Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Sartono Wirodikromo. 2003. *Matematika 2000 untuk SMU Kelas I Semester 2*. Jakarta: Erlangga.

Sumadi, dkk. 1996. *Matematika SMU untuk Kelas I*. Solo: PT Tiga Serangkai.