PELATIHAN INSTRUKTUR/PENGEMBANG SMU

28 JULI s.d. 12 AGUSTUS 2003

MATRIKS

Oleh:

Drs. M. Danuri, M. Pd.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2003

Matriks

SEDERETAN BILANGAN BERBENTUK SIKU-EMPAT yang diapit oleh sepasang kurung siku, seperti

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

dan tunduk kepada aturan-aturan tertentu yang diberikan di bawah disebut matriks,. Matriks (a) dapat dipandang sebagai **matriks koefisien** dari system persamaan linear $\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$ atau sebagai matriks lengkap system persamaan linear tak homogen $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

Dalam matriks

$$(1.1) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} a_{m3} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

bilangan/fungsi a_{ij}, disebut elemennya. Dalam penulisan tikalas ganda, tikalas pertama menunjukkan baris dan tikalas menunjukkan kolom pada mana elemen terletak. Jadi, semua elemen pada baris kedua mempunyai 2 sebagai tilkalas pertama dan semua elemen pada kolom kelima mempunyai 5 sebagai tikalas kedua. Suatu matriks dengan m baris dan n kolom disebut berperingkat $m \times n$.

MATRIKS BUJUR SANGKAR

Bilamana $m = n$, (1.1) adalah bujursangkar dan akan disebut matriks bujursangkar peringkat n atau sebuah matriks bujursangkar n. Dalam suatu matriks bujursangkar, elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut **elemen diagonal**. Jumlah elemen-elemen diagonal suatu matriks bujursangkar A disebut **trace** A.

MATRIKS SAMA

Dua matriks $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ disebut **sama** ($A = B$) jika dan hanya jika berperingkat sama dan setiap elemen yang terletak sama, yaitu jika dan hanya jika

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

Jadi, dua matriks sama jika dan hanya jika satu merupakan duplikat yang lainnya.

MATRIKS NOL

Sebuah matriks yang semua elemennya nol, disebut matriks nol. Bilamana A suatu matriks nol dan tidak terdapat keragu-raguan mengenai peringkatnya, akan kita tuliskan $A = 0$ sebagai pengganti susunan $m \times n$ dari elemen-elemen nol.

JUMLAH MATRIKS

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ dua matriks $m \times n$, jumlah (selisihnya), $A \pm B$, didefinisikan sebagai matriks $C = [c_{ij}]$, $m \times n$, dengan tiap elemen C adalah jumlah (selisih) elemen A dan B yang seletak. Jadi, $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

Contoh 1

Jika A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

dan

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dua matriks berperingkat sama disebut bersesuaian untuk penjumlahan atau pengurangan. Dua matriks berperingkat berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan. Sebagai contoh, matriks (a) dan (b) di atas tidak bersesuaian untuk penjumlahan atau pengurangan.

Jumlah k buah matriks A adalah suatu matriks yang berperingkat sama dengan A dan tiap elemennya sebesar k kali elemen A yang seletak. Kita definisikan: Jika k sebarang sekalar (kita sebut k suatu sekalar untuk membedakannya terhadap [k] yaitu suatu matriks 1×1) maka dengan kA = Ak berarti matriks yang diperoleh dari A dengan cara mengalikan setiap elemennya oleh k.

Contoh 2

Jika A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, maka

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A.3$$

dan

$$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

Khususnya, dengan –A yang disebut negatif dari A, diartikan matriks yang diperoleh dari A dengan cara mengalikan setiap elemennya oleh –1 atau cukup dengan mengubah tanda semua elemennya. Untuk setiap A, berlaku A + (–A) = 0, dengan 0 menyatakan matriks nol berperingkat sama seperti A.

Dengan asumsi A, B, C, bersesuaian untuk penjumlahan, kita nyatakan:

(a) A + B = B + A (hukum komutasi)
(b) A + (B + C) = (A + B) + C (hukum asosiasi)
(c) k(A + B) = kA + kB = (A + B)k, k scalar
(d) Terdapat suatu matriks D sedemikian sehingga A + D = B.

Hukum-hukum ini merupakan hasil dari aljabar elementer yang mengatur penjumlahan bilangan dan polinom.

Mereka memperlihatkan: Matriks-matriks yang bersesuaian mengikuti hukum penjumlahan yang sama seperti elemen-elemen matriks.

PERKALIAN

Dengan hasil kali AB dalam urutan tersebut dari matriks A = $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1m}]$ peringkat $1 \times m$

dengan matriks berperingkat $m \times 1$, B = $\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ . \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ dimaksud matriks berperingkat 1×1,

$C = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1m} b_{m1}]$

$$\text{Yaitu, } [a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}]. \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1m} b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k} b_{k1} \right]$$

Dengan anggapan bahwa A, B, C bersesuaian untuk jumlah dan hasil kali yang ditunjukkan, kita mempunyai

(e) $A(B + C) = AB + AC$ (hukum distribusi pertama)
(f) $(A + B)C = AC + BC$ (hukum distribusi kedua)
(g) $A(BC) = (AB)C$ (hukum asosiasi)

Tetapi

(h) $AB \neq BA$, secara umum,
(i) $AB = 0$ tidak perlu membawakan $A = 0$ atau $B = 0$
(j) $AB = AC$ tidak perlu membawakan $B = C$

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \ldots$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \ldots$

   (c) $3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \ldots$

   (d) $-\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \ldots$

2. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan $D = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ demikian sehingga $A + B - D = 0$.

3. (a) $[4\ \ 5\ \ 6] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \ldots$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [4\ \ 5\ \ 6] = \ldots$

(c) $[1\ \ 2\ \ 3]\begin{bmatrix}4 & -6 & 9 & 6\\ 0 & -7 & 10 & 7\\ 5 & 8 & -11 & -8\end{bmatrix} = \ldots$

(d) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} = \ldots$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix} = \ldots$

4. Tetapkan $A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Maka

$$A^2 = \begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix} \text{ dan } A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11 & -8 & 0\\ 8 & -1 & 8\\ 8 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

Soal-soal

1. Diberikan $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

   (a) Hitung: $A + B = \begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $A - C = \begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

   (b) Hitung: $-2A = \begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\ -10 & 0 & -4\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}$, $0.B = 0$

   (c) Periksa: $A + (B - C) = (A + B) - C$

   (d) Temukan matriks D sedemikian sehingga $A + D = B$. Periksa bahwa $D = B - A = -(A - B)$.

2. Diberikan $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, periksa $AB = 0$ dan $BA = \begin{bmatrix}-11 & 6 & -1\\ -22 & 12 & -2\\ -11 & 6 & -1\end{bmatrix}$

   Karenanya, secara umum $AB \neq BA$.

3. Diberikan $A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & -1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -2\\ 3 & -2 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -1 & 0\end{bmatrix}$, perlihatkan bahwa $AB = AC$. Jadi $AB = AC$ tidak perlu membawakan $B = C$.

4. Diberikan $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ perlihatkan bahwa $(AB)C = A(BC)$.

5. Menggunakan matriks soal 1, perlihatkan bahwa A(B + C) = AB + AC dan (A + B)C = AC + BC
6. Secara umum, jelaskan kenapa $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ dan $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$
7. Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$
   (a) Perlihatkan bahwa AB = BA = 0, AC = A, CA = C
   (b) Gunakan hasil (a) untuk memperlihatkan bahwa ACB = CBA, $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.
8. Diberikan $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, dengan $i^2 = -1$, turunkan sebuah rumus untuk pangkat bulat positif dari A

   Jawab. $A^n = I, A, -I, -A$ sesuai dengan bilamana n = 4p, 4p + 1, 4p + 2, 4p + 3, dengan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

BEBERAPA JENIS MATRIKS

MATRIKS SATUAN.
Suatu matriks bujur sangkar A yang elemen-elemennya $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ disebut **segitiga atas**; matriks bujur sangkar A yang elemen-elemennya $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ disebut **segitiga bawah**. Jadi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ adalah segitiga atas dan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ adalah segitiga bawah.

Matriks $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$, yang disamping segitiga atas juga segitiga bawah, disebut **matriks diagonal.** Akan seringkali ditulis sebagai

$$D = \text{diag}\ (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

Jika dalam matriks diagonal D di atas, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = k$, D disebut matriks **skalar;** sebagai tambahan jika $k = 1$, matriks itu disebut **matriks satuan** dan ditunjukkan oleh I_n. Misalnya

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIKS BUJUR SANGKAR KHUSUS. Jika A dan B matriks bujur sangkar demikian sehingga AB = BA, maka A dan B disebut B **komutatif** atau disebut **saling bertukaran.** sangat mudah memperlihatkan bahwa jika A sebarang matriks bujur sangkar peringkat n ia komutasi dengannya sendiri dan juga dengan I_n..

Jika A dan B sedemikian sehingga $AB = –BA,$ matriks A dan B disebut **anti-komutasi.** Matriks A dengan sifat $A^{k+1} = A,$ dengan k bulat positif, disebut **periodik.** Jika k bilangan bulat positif terkecil untuk mana A^{k+1} maka A disebut **periode** k.
Jika $k = 1$, sehingga $A^2 = A,$ disebut **idempoten.**

Matriks $A,$ untuk mana $A^p = 0$, dengan p bulat positif disebut **nilpoten.** Jika p bilangan bulat positif terkecil untuk mana $A^p = 0$, dengan p bulat positif disebut **nilpoten.**
Jika p bilangan bulat positif terkecil untuk mana $A^p = 0$, maka A disebut nilpoten **berindeks** p.

BALIKAN MATRIKS. Jika A dan B matriks bujur sangkar demikian sehingga $AB = BA = I$, maka B disebut **balikan** dari A dan kita tuliskan $B = A^{-1}I$ (B sama dengan A balikan). Matriks B juga mempunyai Asebagai balikannya dan kita boleh menuliskan $A = B^{-1}$.

Contoh 1. Karena $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$ masing-masing matriks dalam hasil kali merupakan balikan dari lainnya.

TRANSPOSE SUATU MATRIKS. Matriks peringkat $n \times m$ yang diperoleh dari penukaran baris dan kolom matriks A, $m \times n$ disebut **tranpose** dari A dan dinyatakan oleh A' = (A, tranpose). Misalnya, tranpose $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ adalah $A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. perhatikan bahwa elemen a_{ij} pada baris ke i dan kolom ke j dari A berada pada baris ke j dan kolom ke i dari A'.

Jika A' dan B' masing-masing tranpose dari A dan B dan jika k suatu skalar, segera kita mempunyai

$$(a)\ (A')' = A \quad \text{dan} \quad (bA)' = kA'$$

Tranpose dari jumlah dua matriks adalah jumlah masing-masing transposnya, yaitu, dan

$$(A + B)' = A' + B'$$

Tranpose dari hasil kali dua matriks adalah hasil kali masing-masing tranposenya **dalam urutan terbalik,** yaitu.

MATRIKS SIMETRI. Matriks A sedemikian sehingga $A' = A$ disebut **simetri.** suatu matrik bujur sangkar $A = [a_{ij}]$ adalah simetri asalkan a_{ji}, untuk semua i dan j. Misalnya,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ adalah simetri dan juga kA untuk sebarang skalar k.

dalam soal 13 kita buktikan

Jika A matriks bujur sangkar peringkat n, maka $A + A'$ adalah simetri.

Matrik bujur sangkar A demikian sehingga $A' = -A$ disebut **simetri.** Jadi, suatu matriks bujur sangkar A adalah simetri-miring asalkan $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j. Jelas, elemen-elemen diagonal nol. Misalnya, $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ adalah simetri miring dan juga kA untuk sebarang skalar k,

Dengan hanya sedikit perubahan dalam soal 13, kita dapat membuktikan

Jika A matrik bujur sangkar sebarang, maka $A - A'$ adalah simetri miring.

Dari Teorema IV dan V membawakan

Setiap matriks A bujur sangkar dapat dituliskan sebagai jumlah suatu matriks simetri $B = \frac{1}{2}(A + A')$ dan matriks simetri miring $C = \frac{1}{2}(A + A')$