LOGIKA MATEMATIKA

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA
Jenjang Dasar
Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika

Oleh:
Drs. Markaban, M.Si.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

==

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

DAFTAR ISI

Peta Kompetensi Guru Matematika SMK Teknik

Jenjang Dasar
Umum • Menjelaskan wawasan pendidikan di sekolah menengah kejuruan • Menjelaskan kurikulum berbasis kompetensi
Spesialisasi/Substansi: • Menjelaskan konsep-konsep dasar materi/pokok bahasan matematika yang akan diajarkan kepada siswa
Manajemen KBM: • Menjelaskan kajian materi matematika SMK yang sesuai dengan KBK. • Menjelaskan keunggulan/kelemahan teori belajar • Menyusun rencana dan mempraktekkan interaksi pembelajaran kepada siswa yang mengacu pada PAKEM (antara lain Missouri, Mathematical Project, dan Realistik Mathematics Education/CTL) • Menjelaskan penggunaan kalkulator sebagai media pembelajaran kepada para siswa
Litbang: • Menjelaskan karakteristik penelitian tindakan kelas
Evaluasi Proses dan Hasil Belajar: • Menjelaskan prinsip-prinsip dasar penilaian • Menjelaskan penilaian berbasis sekolah • Menjelaskan alat penilaian • Menjelaskan penyekoran • Menganalisis hasil ulangan harian
Program Tindak Lanjut • Menyusun program tindak lanjut pasca diklat

Informasi

1. Kompetensi prasyarat modul ini adalah kompetensi yang berkait dengan substansi materi matematika pada umumnya, seperti bilangan real, persamaan, atau geometri; serta pengetahuan umum biasa.

2. Kompetensi yang akan dipelajari adalah cara mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan penalaran secara logis dan kritis.

3. Indikator keberhasilan:

   - Konsep dasar dari nilai kebenaran suatu pernyataan tunggal mampu dikembangkan guru dari kehidupan nyata sehari-hari, dijelaskan dan diberikan contohnya.

   - Konsep dasar dari nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk mampu dikembangkan guru dari kehidupan nyata sehari-hari, dijelaskan dan diberikan contohnya.

   - Hal-hal yang terkait dengan implikasi seperti konvers, invers, dan kontraposisi dari suatu implikasi mampu dikembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, dijelaskan dan diberikan contohnya.

   - Hukum-hukum yang berkaitan dengan logika mampu dikembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, dijelaskan dan diberikan contohnya.

   - Hukum-hukum yang berkaitan dengan penarikan kesimpulan mampu dikembangkan dari kehidupan nyata sehari-hari, dijelaskan dan diberikan contohnya.

4. Kompetensi yang dipelajari akan digunakan untuk mempelajari kompetensi mengembangkan keterampilan guru dalam menyelesaikan masalah / menerapkan konsep-konsep dasar pada materi/pokok bahasan matematika yang akan diajarkan kepada siswa.

5. Skenario pembelajarannya akan dimulai dengan contoh serta permasalahan dalam kehidupan nyata sehari-hari sehingga teori-teori logika matematika yang akan dibahas akan muncul dari contoh serta permasalahan tersebut, diikuti dengan berdiskusi untuk membahas contoh-contoh praktis yang dapat langsung dicobakan dan diaplikasikan para guru matematika SMK Teknik di kelasnya masing-masing. Di samping itu, telah disiapkan juga soal-soal sebagai latihan. Untuk itu, para peserta diklat diharapkan untuk ikut berpartisipasi aktif dengan ikut memberikan saran, ide, dan pendapat selama diskusi berlangsung; serta aktif menyelesaikan soal-soal.

BAGIAN I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Merupakan suatu kenyataan yang tidak dapat dibantah bahwa logika, penalaran, dan argumentasi sangat sering digunakan di dalam kehidupan nyata sehari-hari, di dalam mata pelajaran matematika sendiri maupun mata pelajaran lainnya. Karenanya, topik ini akan sangat berguna bagi siswa, karena di samping dapat meningkatkan daya nalar mereka, topik tersebut akan dapat langsung diaplikasikan di dalam kehidupan nyata mereka sehari-hari dan di saat mempelajari mata pelajaran lainnya. Kompetensi yang hendak dicapai adalah agar para guru memiliki kemampuan untuk mengembangkan keterampilan siswa dalam melakukan penalaran secara logis dan kritis.

B. TUJUAN

Modul ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan bagi guru SMU yang mengikuti pelatihan di PPPG Matematika, dengan harapan dapat digunakan sebagai salah satu sumber untuk memecahkan masalah-masalah pengajaran Logika Matematika SMU dan dapat digunakan juga sebagai bahan pengayaan wawasan para guru sehingga bahan yang disajikan dapat lebih mudah dicerna para siswa.

C. CARA PENGGUNAAN MODUL

Pembahasan pada modul ini lebih menitik-beratkan pada pengertian logika, konjungsi, disjungsi, implikasi, konvers, invers, kontraposisi, dan kuantor. Setiap bagian modul ini dimulai dengan teori-teori, diikuti beberapa contoh dan diakhiri dengan latihan. Di samping itu, dikemukakan juga tentang hal-hal penting yang perlu mendapat penekanan para guru di saat membahas pokok bahasan ini di kelasnya. Karenanya, para pemakai modul ini disarankan untuk membaca lebih dahulu teorinya sebelum mencoba mengerjakan latihan yang ada. Jika para pemakai modul ini mengalami kesulitan maupun memiliki saran, sudi kiranya menghubungi PPPG Matematika, Kotak Pos 31 YKBS, Yogyakarta.

BAGIAN II
PENGERTIAN LOGIKA DAN PERNYATAAN

Kebenaran suatu teori yang dikemukakan setiap ilmuwan, matematikawan, maupun para ahli merupakan hal yang sangat menentukan reputasi mereka. Untuk mendapatkan hal tersebut, mereka akan berusaha untuk mengaitkan suatu fakta atau data dengan fakta atau data lainnya melalui suatu proses penalaran yang sahih atau valid. Sebagai akibatnya, logika merupakan ilmu yang sangat penting dipelajari. Di dalam mata pelajaran matematika maupun IPA, aplikasi logika seringkali ditemukan meskipun tidak secara formal disebut sebagai belajar logika. Bagian ini akan membahas tentang logika yang didahului dengan pengertian penalaran, diikuti dengan pernyataan, perakit-perakit pembentuk: negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi.

A. PENGERTIAN LOGIKA

Ada pernyataan menarik yang dikemukakan mantan Presiden AS Thomas Jefferson sebagaimana dikutip Copi (1978) berikut ini: "*In a republican nation, whose citizens are to be led by reason and persuasion and not by force, the art of reasoning becomes of first importance"* (p. vii). Pernyataan itu menunjukkan pentingnya logika, penalaran dan argumentasi dipelajari dan dikembangkan di suatu negara sehingga setiap warga negara akan dapat dipimpin dengan daya nalar (otak) dan bukannya dengan kekuatan (otot) saja. Karenanya, seperti yang dinyatakan mantan Presiden AS tadi, seni bernalar merupakan hal yang sangat penting. Di samping itu, Copi (1978) juga mengutip pendapat Juliana Geran Pilon yang senada dengan yang diucapkan mantan Presiden AS tadi: "*Civilized life depends upon the success of reason in social intercourse, the prevalence of logic over violence in interpersonal conflict"* (p. vii).

Dua pernyataan di atas telah menunjukkan pentingnya penalaran (*reasoning*) dalam percaturan politik dan pemerintahan di suatu negara. Tidak hanya di bidang ketatanegaraan maupun hukum saja kemampuan bernalar itu menjadi penting. Di saat mempelajari matematika maupun ilmu-ilmu lainnya penalaran itu menjadi sangat penting dan menentukan. Secara etimologis, logika berasal dari kata Yunani *'logos'* yang berarti kata, ucapan, pikiran secara utuh, atau bisa juga berarti ilmu pengetahuan (Kusumah, 1986). Dalam arti luas, logika adalah suatu cabang ilmu yang mengkaji penurunan-penurunan kesimpulan yang sahih (valid, *correct*) dan yang tidak sahih (tidak valid, *incorrect*). Proses berpikir yang terjadi di saat menurunkan atau menarik kesimpulan dari pernyataan-pernyataan yang diketahui benar atau dianggap benar itu sering juga disebut dengan penalaran (*reasoning*).

B. PERNYATAAN

Dimulai sejak ia masih kecil, setiap manusia, sedikit demi sedikit melengkapi perbendaharaan kata-katanya. Di saat berkomunikasi, seseorang harus menyusun kata-kata yang dimilikinya menjadi suatu kalimat yang memiliki arti atau bermakna. Kalimat adalah susunan kata-kata yang memiliki arti yang dapat berupa *pernyataan* ("Pintu itu tertutup."), *pertanyaan* ("Apakah pintu itu tertutup?"), *perintah* ("Tutup pintu itu!") ataupun *permintaan* ("Tolong pintunya ditutup."). Dari empat macam kalimat tersebut, hanya pernyataan saja yang memiliki nilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus benar atau salah. Meskipun para ilmuwan, matematikawan ataupun ahli-ahli lainnya sering menggunakan beberapa macam kalimat tersebut dalam kehidupan sehari-harinya, namun hanya pernyataan saja yang menjadi perhatian mereka dalam mengembangkan ilmunya.

Setiap ilmuwan, matematikawan, ataupun ahli-ahli lainnya akan berusaha untuk menghasilkan suatu pernyataan atau teori yang benar. Suatu pernyataan (termasuk teori) tidak akan ada artinya jika tidak bernilai benar. Karenanya, pembicaraan mengenai benar tidaknya suatu kalimat yang memuat suatu teori telah menjadi pembicaraan dan perdebatan para ahli filsafat dan logika sejak dahulu kala. Beberapa nama yang patut diperhitungkan karena telah berjasa untuk kita adalah Plato (427 − 347 SM), Aristoteles (384 − 322 SM), Charles S Peirce (1839 − 1914) dan Bertrand Russell (1872 − 1970). Paparan berikut akan membicarakan tentang kebenaran, dalam arti, bilamana suatu pernyataan yang dimuat di dalam suatu kalimat disebut benar dan bilamana disebut salah. Untuk menjelaskan tentang kriteria kebenaran ini perhatikan dua kalimat berikut:

a. Semua manusia akan mati.
b. Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°.

Pertanyaannya, dari dua kalimat tersebut, kalimat manakah yang bernilai benar dan manakah yang bernilai salah. Pertanyaan selanjutnya, mengapa kalimat tersebut dikategorikan bernilai benar atau salah, dan bilamana suatu kalimat dikategorikan sebagai kalimat yang bernilai benar atau salah. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, Suriasumantri (1988) menyatakan bahwa ada tiga teori yang berkait dengan kriteria kebenaran ini, yaitu : teori korespondensi, teori koherensi, dan teori pragmatis. Namun sebagian buku hanya membicarakan dua teori saja, yaitu teori korespondensi dan teori koherensi sehingga pembicaraan kita hanya berkait dengan dua teori tersebut.

1. Teori Korespondensi

Teori korespondensi (*the correspondence theory of truth*) menunjukkan bahwa suatu kalimat akan bernilai benar jika hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan tersebut sesuai atau cocok dengan keadaan yang sesungguhnya. Contohnya, “Surabaya adalah ibukota Propinsi Jawa Timur” merupakan suatu pernyataan yang bernilai benar karena kenyataannya memang demikian, yaitu Surabaya memang benar merupakan ibukota Propinsi Jawa Timur. Namun pernyataan “Tokyo adalah Ibukota Singapura”, menurut teori ini akan bernilai salah karena hal-hal yang terkandung di dalam pernyataan itu tidak sesuai dengan kenyataannya.

Teori-teori Ilmu Pengetahuan Alam banyak didasarkan pada teori korespondensi ini. Dengan demikian jelaslah bahwa teori-teori atau pernyataan-pernyataan Ilmu Pengetahuan Alam akan dinilai benar jika pernyataan itu melaporkan, mendeskripsikan, ataupun menyimpulkan kenyataan atau fakta yang sebenarnya. Sedangkan Matematika yang tidak hanya mendasarkan pada kenyataan atau fakta semata-mata namun mendasarkan pada rasio dan aksioma telah melahirkan teori koherensi yang akan dibahas pada bagian berikut ini.

2. Teori Koherensi

Teori koherensi menyatakan bahwa suatu kalimat akan bernilai benar jika pernyataan yang terkandung di dalam kalimat itu bersifat koheren, konsisten, atau tidak bertentangan dengan pernyataan-pernyataan sebelumnya yang dianggap benar. Contohnya, pengetahuan Aljabar telah didasarkan pada pernyataan pangkal yang dianggap benar. Pernyataan yang dianggap benar itu disebut aksioma atau postulat.

Vance (19..) menyatakan ada enam aksioma yang berkait dengan bilangan real a, b, dan c terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (.) berlaku sifat:

1) tertutup, $a + b \in R$ dan $a.b \in R$.
2) asosiatif, $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a .(b . c) = (a . b) . c$
3) komutatif, $a + b = b + a$ dan $a.b = b.a$
4) distributif, $a.(b + c) = a.b + a.c$ dan $(b + c).a = b.a + c.a$
5) identitas, $a + 0 = 0 + a = a$ dan $a.1 = 1. a = a$
6) invers, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ dan $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$

Berdasar enam aksioma itu, teorema seperti $-b + (a + b) = a$ dapat dibuktikan dengan cara berikut:

$$
\begin{aligned}
-b + (a + b) &= -b + (b + a) && \text{Aks 3 - Komutatif}\\
&= (-b + b) + a && \text{Aks 2 - Asosiatif}\\
&= 0 + a && \text{Aks 6 - Invers}\\
&= a && \text{Aks 5 – Identitas}
\end{aligned}
$$

Demikian juga pernyataan bahwa jumlah sudut-sudut suatu segi-n adalah: $(n - 2) \times 180^0$ akan bernilai benar karena konsisten dengan aksioma yang sudah disepakati kebenarannya dan konsisten juga dengan dalil atau teorema sebelumnya yang sudah terbukti. Dengan demikian jelaslah bahwa bangunan matematika didasarkan pada rasio semata-mata, kepada aksioma-aksioma yang dianggap benar tadi. Suatu hal yang sudah jelas benar pun harus ditunjukkan atau dibuktikan kebenarannya dengan langkah-langkah yang benar.

Dari paparan di atas jelaslah bahwa pada dua pernyataan berikut:

a) Semua manusia akan mati.
b) Jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180°.;

maka baik pernyataan a) maupun b) akan sama-sama bernilai benar, namun dengan alasan yang berbeda. Pernyataan a) bernilai benar karena pernyataan itu melaporkan, mendeskripsikan ataupun menyimpulkan kenyataan atau fakta yang sebenarnya. Sampai detik ini, belum pernah ada orang yang hidup kekal dan abadi. Pernyataan a) tersebut akan bernilai salah jika sudah ditemukan suatu alat atau obat yang sangat canggih sehingga akan ada orang yang tidak bisa mati lagi. Sedangkan pernyataan b) bernilai benar karena pernyataan itu konsisten atau koheren ataupun tidak bertentangan dengan aksioma yang sudah disepakati kebenarannya dan konsisten juga dengan dalil atau teorema sebelumnya yang sudah terbukti. Itulah sekilas tentang teori korespondensi dan teori koherensi yang memungkinkan kita untuk dapat menentukan benar tidaknya suatu pernyataan.

Latihan 2.1

1. Manakah di antara kalimat berikut yang merupakan pernyataan?
   a. $x + 3 = 2$.
   b. $x + 3 = 2$ adalah suatu pernyataan.
   c. 111 adalah bilangan prima.
   d. Tadi pagi Fahmi bertanya: "Pak Guru kapan ulangan?"
   e. $2n + 1$ untuk $n \in A$ adalah bilangan ganjil.

2. Andi berbohong pada hari Senin, Selasa, dan Rabu, sedangkan pada hari-hari yang lain ia berkata benar. Teman karibnya, si Badu berbohong pada hari Kamis, Jumat, dan Sabtu, sedangkan pada hari-hari yang lain ia berkata benar. Pada suatu hari, Andi berkata: "Kemarin adalah hari di mana saya berbohong." Badu lalu menimpali: "Kemarin adalah hari di mana saya berbohong juga.".
   a. Pada hari-hari apakah mereka berdua dapat menyatakan hal itu.
   b. Jika mereka berdua sama-sama menyatakan bahwa hari kemarin adalah hari di mana mereka berkata benar, pada hari-hari apakah mereka berdua dapat menyatakan hal itu?

3. Pada suatu rumah makan, ANDI seorang SOPIR sedang duduk mengelilingi meja berbentuk persegi dengan tiga orang temannya. Ketiga teman Andi tersebut bekerja sebagai KELASI, PILOT, dan MARKONIS.

Tentukan pekerjaan Budi jika: Andi duduk di sebelah kiri CHANDRA, BUDI duduk di sebelah kanan kelasi, dan DANI yang duduk berhadapan dengan Chandra bukanlah seorang pilot.

4. Ada tiga orang siswa yaitu TONI, DIDI, dan HORY. Ditentukan bahwa:

   a. Toni tidak pernah berbohong. Didi kadang-kadang berbohong. Sedangkan Hory selalu berbohong.
   b. Mereka memakai kaos HIJAU, KUNING, dan MERAH.
   c. Siswa yang memakai kaos kuning, menyatakan bahwa siswa yang berkaos merah adalah Hory.
   d. Siswa yang memakai kaos merah, menyatakan bahwa dirinya adalah Didi.
   e. Siswa terakhir yang memakai kaos hijau, menyatakan bahwa siswa yang berkaos merah adalah Toni.

   Berdasar keterangan di atas, tentukan warna kaos yang dipakai tiap siswa.

BAGIAN III
DISJUNGSI, KONJUNGSI, IMPLIKASI, BIIMPLIKASI DAN NEGASINYA

Adakalanya, kita dituntut untuk menegasikan atau membuat pernyataan baru yang menunjukkan pengingkaran atas pernyataan yang ada, dengan menggunakan perakit "bukan" atau "tidak". Di samping itu, mereka harus menggabungkan dua pernyataan atau lebih dengan menggunakan perakit "atau", "dan", "Jika … maka ….", maupun "… jika dan hanya jika …." yang dikenal di matematika sebagai konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi. Bagian ini akan membahas perakit-perakit tersebut

C. PERAKIT/PERANGKAI

Perakit atau perangkai ini sering juga disebut dengan operasi. Dari satu atau dua pernyataan tunggal dapat diberikan perakit "tidak" , "dan", "atau", "jika … maka …", dan " … jika dan hanya jika … " sehingga terbentuk suatu negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Sub bagian ini akan membahas tentang perakit atau penggandeng tersebut.

1. Negasi

Jika p adalah "Surabaya ibukota Jawa Timur.", maka negasi atau ingkaran dari pernyataan p tersebut adalah ~p yaitu: "Surabaya bukan ibukota Jawa Timur." atau "Tidak benar bahwa Surabaya ibukota Jawa Timur.".

Dari contoh di atas nampak jelas bahwa p merupakan pernyataan yang bernilai benar karena Surabaya pada kenyataannya memang ibukota Jawa Timur, sehingga ~p akan bernilai salah. Namun jika p bernilai salah maka ~p akan bernilai benar seperti ditunjukkan oleh tabel kebenaran di bawah ini.

p	~p
B	S
S	B

2. Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya, pernyataan Adi berikut :

"Fahmi makan nasi <u>dan</u> minum kopi."

Pernyataan tersebut ekivalen dengan dua pernyataan tunggal berikut: "Fahmi makan nasi." dan sekaligus "Fahmi minum kopi."

Dalam proses pembelajaran di kelas, berilah kesempatan kepada para siswa untuk bertanya kepada diri mereka sendiri, dalam hal mana pernyataan Adi di atas bernilai benar dan dalam hal mana bernilai salah dalam empat kasus berikut, yaitu: (1) Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi, (2) Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi, (3) Fahmi tidak makan nasi namun ia minum kopi, dan (4) Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi.:

Pada kasus pertama, Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi. Dalam kasus seperti ini, tidaklah mungkin Anda akan mengatakan pernyataan Adi tadi bernilai salah. Alasannya, pernyataan Adi tadi sesuai dengan kenyataannya. Pada kasus kedua, Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi. Dalam hal ini, tentunya Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena meskipun Fahmi sudah makan nasi namun ia tidak minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi. Sejalan dengan itu, pada kasus ketiga, Fahmi tidak makan nasi meskipun ia sudah minum kopi. Sebagaimana kasus kedua tadi, Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena Fahmi tidak makan nasi sebagaimana yang dinyatakan Adi bahwa Fahmi makan nasi dan minum kopi. Akhirnya, pada kasus keempat, Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi. Dalam hal ini Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena tidak ada kesesuaian antara yang dinyatakan dengan kenyataan yang sesungguhnya.

Berdasar penjelasan di atas, dapatlah disimpulkan bahwa suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai benar, sedangkan nilai kebenaran yang selain itu akan bernilai salah sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

3. Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya, pernyataan Adi berikut: "Fahmi makan nasi atau minum kopi." Sekarang, bertanyalah kepada diri Anda sendiri, dalam hal mana pernyataan Adi di atas akan bernilai benar dalam empat kasus berikut, yaitu: (1) Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi, (2) Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi, (3) Fahmi tidak makan nasi namun ia minum kopi, dan (4) Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi.

Pada kasus pertama, Fahmi memang benar makan nasi dan ia juga minum kopi. Dalam kasus seperti ini, tidaklah mungkin Anda akan mengatakan pernyataan Adi tadi bernilai salah, karena pernyataan Adi tadi sesuai dengan kenyataannya. Pada kasus kedua, Fahmi makan nasi namun ia tidak minum kopi. Dalam hal ini, tentunya Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai benar karena Fahmi sudah benar makan nasi meskipun ia tidak minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi. Sedangkan pada kasus ketiga, Fahmi tidak makan nasi namun ia minum kopi. Sebagaimana kasus kedua tadi, Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai benar karena meskipun Fahmi tidak makan nasi namun ia sudah minum kopi sebagaimana yang dinyatakan Adi. Akhirnya, pada kasus keempat, Fahmi tidak makan nasi dan ia tidak minum kopi. Dalam hal ini Anda akan menyatakan bahwa pernyataan majemuk Adi tadi bernilai salah karena tidak ada kesesuaian antara yang dinyatakan dengan kenyataan yang sesungguhnya. Ia menyatakan Fahmi makan nasi atau minum kopi namun kenyataannya, Fahmi tidak melakukan hal itu.

Berdasar penjelasan di atas, dapatlah disimpulkan bahwa suatu disjungsi $p \vee q$ akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar sebagaimana ditunjukkan pada tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

4. Implikasi

Misalkan ada dua pernyataan p dan q. Yang sering menjadi perhatian para ilmuwan maupun matematikawan adalah menunjukkan atau membuktikan bahwa jika p bernilai benar akan mengakibatkan q bernilai benar juga. Untuk mencapai keinginannya tersebut, diletakkanlah kata "Jika" sebelum pernyataan pertama lalu diletakkan juga kata "maka" di antara pernyataan pertama dan pernyataan kedua, sehingga didapatkan suatu pernyataan majemuk yang disebut dengan implikasi, pernyataan bersyarat, kondisional atau hypothetical dengan notasi "$\Rightarrow$" seperti ini:

$$p \Rightarrow q$$

Notasi di atas dapat dibaca dengan :

1) Jika p maka q,
2) q jika p,
3) p adalah syarat cukup untuk q, atau
4) q adalah syarat perlu untuk p.

Implikasi $p \Rightarrow q$ merupakan pernyataan majemuk yang paling sulit dipahami para siswa SMU. Untuk membantu para siswa memahami kalimat majemuk implikasi tersebut, Bapak dan Ibu Guru dapat memulai proses pembelajaran dengan berceritera bahwa Adi menyatakan pernyataan majemuk berikut ini:

Jika hari hujan maka saya (Adi) membawa payung.

Dalam hal ini dimisalkan:

p: Hari hujan.
q: Adi membawa payung.

Berilah kesempatan bagi siswa untuk berpikir, dalam hal manakah pernyataan Adi tadi akan bernilai benar atau salah untuk empat kasus berikut, yaitu: (1) Hari benar-benar hujan dan Adi benar-benar membawa payung, (2) Hari benar-benar hujan namun Adi tidak membawa payung, (3) Hari tidak hujan namun Adi membawa payung, dan (4) Hari tidak hujan dan Adi tidak membawa payung.

Pada kasus pertama, hari benar-benar hujan dan Adi benar-benar membawa payung sebagaimana yang ia nyatakan. Bagaimana mungkin ia akan dinyatakan berbohong dalam kasus ini? Dengan demikian jelaslah bahwa kedua komponen yang sama-sama bernilai benar itu telah menyebabkan pernyataan majemuk (implikasi) yang dinyatakan Adi tadi akan bernilai benar. Pada kasus kedua, hari itu benar-benar hujan akan tetapi Adi tidak membawa payung sebagaimana yang seharusnya ia lakukan seperti yang telah dinyatakannya, bagaimana mungkin pernyataan Adi tadi akan dinilai benar? Dengan kata lain, komponen p yang bernilai benar namun tidak diikuti dengan komponen q yang seharusnya bernilai benar juga, akan menyebabkan pernyataan majemuk (implikasi) yang dinyatakan Adi tadi akan bernilai salah.

Akhirnya, untuk kasus ketiga dan keempat, di mana hari itu tidak hujan, tentunya Anda tidak akan menyebut pernyataan majemuk (implikasi) Adi tersebut sebagai pernyataan yang salah, karena Adi hanyalah menyatakan bahwa sesuatu akan terjadi yaitu dia akan membawa payung jikalau hari hujan. Dengan demikian jelaslah bahwa implikasi $p \Rightarrow q$ hanya akan bernilai salah untuk kasus kedua di mana p bernilai benar namun q-nya bernilai salah, sedangkan yang selain itu implikasi $p \Rightarrow q$ akan bernilai benar seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

5. Biimplikasi

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang bernilai sama dengan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ sehingga dapat dibaca: "p jika dan hanya jika q" atau "p bila dan hanya bila q." Tabel kebenaran dari $p \Leftrightarrow q$ adalah :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dengan demikian jelaslah bahwa biimplikasi dua pernyataan p dan q hanya akan bernilai benar jika kedua pernyataan tunggalnya bernilai sama. Contoh biimplikasi:

1. Suatu segitiga adalah segitiga siku-siku jika dan hanya jika luas persegi pada hipotenusanya sama dengan jumlah luas dari persegi-persegi pada kedua sisi yang lain.
2. Suatu segitiga adalah segitiga sama sisi bila dan hanya bila ketiga sisinya sama.

<u>Latihan 3.1</u>

5. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut!
   a. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$.
   b. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
   c. $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.
   d. Jika $x^2 = 4$ maka $x = 2$.
   e. Jika $x = -2$ maka $x^2 = 4$.
   f. Jika $3x + 4 = 2$ dan $x \in B$, maka $x = -1$.

6. Jika p : 10 habis dibagi 5.
   q : 8 adalah bilangan prima.

   Nyatakan dalam kalimat sehari-hari pernyataan-pernyataan di bawah ini lalu tentukan nilai kebenarannya.

a. $\sim p$ b. $\sim q$ c. $p \wedge q$
d. $p \vee q$ e. $\sim p \wedge \sim q$ f. $\sim p \wedge q$
g. $p \wedge \sim q$ h. $p \Rightarrow q$ i. $p \Leftrightarrow q$.
j. $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

7. Jika a: Lisa gadis cantik dan
b: Lisa gadis cerdas,

nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a, b dan simbol-simbol logika matematika.

a. Lisa gadis yang cantik namun tidak cerdas.
b. Lisa gadis yang tidak cantik dan tidak cerdas.
c. Meskipun Lisa bukanlah gadis yang cantik namun ia gadis yang cerdas.
d. Lisa gadis yang cantik sekaligus juga gadis yang cerdas.
e. Tidak benar bahwa Lisa gadis yang cantik dan cerdas.
f. Jika Lisa gadis yang cantik maka ia tidak cerdas.
g. Jika Lisa gadis yang tidak cantik maka ia tidak cerdas.

8. Buatlah tabel kebenaran dari pernyataan ini :

a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ b. $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \sim q \Rightarrow r \wedge q)$
c. $\sim[(\sim p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$

D. INGKARAN ATAU NEGASI SUATU PERNYATAAN

1. Negasi Suatu Konjungsi

Konjungsi adalah suatu pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "dan". Contohnya, pernyataan Adi berikut :

"Fahmi makan nasi <u>dan</u> minum kopi."

Pernyataan tersebut ekivalen dengan dua pernyataan tunggal berikut: "Fahmi makan nasi." dan sekaligus "Fahmi minum kopi." Suatu konjungsi $p \wedge q$ akan bernilai benar hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai benar. Sedangkan negasi atau ingkaran suatu pernyataan adalah pernyataan lain yang bernilai benar jika pernyataan awalnya bernilai salah dan bernilai salah jika pernyataan awalnya bernilai benar. Karena itu, negasi dari: "Fahmi makan nasi <u>dan</u> minum kopi." adalah suatu pernyataan majemuk lain yang salah satu komponennya merupakan negasi dari komponen pernyataan awalnya. Dengan demikian, negasinya adalah “"Fahmi tidak makan nasi <u>atau</u> tidak minum kopi."; sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	S	S	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	S	B	B	B

2. Negasi Suatu Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang menggunakan perakit "atau". Contohnya, pernyataan Adi berikut: "Fahmi makan nasi <u>atau</u> minum kopi." Suatu disjungsi $p \vee q$ akan bernilai salah hanya jika komponen-komponennya, yaitu baik p maupun q, keduanya bernilai salah, yang selain itu akan bernilai benar. Karenanya, negasinya adalah "Fahmi tidak makan nasi dan tidak minum kopi," sebagaimana ditunjukkan tabel kebenaran berikut:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	B	S	S	S
B	S	B	S	B	S
S	B	B	B	S	S
S	S	S	B	B	B

3. Negasi Suatu Implikasi

Perhatikan pernyataan berikut yang merupakan suatu implikasi:

“Jika hari hujan maka Adi membawa payung.”

Negasi dari implikasi di atas adalah: “Hari hujan akan tetapi Andi tidak membawa payung.” sehingga $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ seperti ditunjukkan tabel kebenaran berikut ini:

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S
B	S	B	S	B
S	B	S	B	S
S	S	B	B	S

Berdasar penjelasan di atas, $p \Rightarrow q \equiv \sim[\sim (p \Rightarrow q)] \equiv \sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

4. Negasi Suatu Biimplikasi

Biimplikasi atau bikondisional adalah pernyataan majemuk dari dua pernyataan p dan q yang dinotasikan dengan $p \Leftrightarrow q$ yang ekuivalen $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; sehingga:

$$\begin{aligned}
\sim (p \Leftrightarrow q) &\equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\
&\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\
&\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)] \\
&\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)
\end{aligned}$$

Latihan 3.2

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut ini lalu tentukan nilai kebenarannya.
   a. $3 + 2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2 = 5$
   b. $3 + 2 = 5 \Rightarrow 4 + 2 = 5$.
   c. $3 + 2 = 5$ atau Jakarta ibukota DI Aceh.

2. Jika p : 10 habis dibagi 5.
   q : 8 adalah bilangan prima.

   Tentukan negasi dari pernyataan-pernyataan di bawah ini lalu tentukan nilai kebenarannya.

   a. $\sim p$ b. $\sim q$ c. $p \wedge q$
   d. $p \vee q$ e. $\sim p \wedge \sim q$ f. $\sim p \wedge q$

g. $p \wedge \sim q$ h. $p \Rightarrow q$ i. $p \Leftrightarrow q$.
j. $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

3. Jika a: Lisa gadis cantik dan
   b: Lisa gadis cerdas,

   nyatakan pernyataan di bawah ini dengan menggunakan a, b dan simbol-simbol logika matematika lalu tentukan negasinya.
   a. Lisa gadis yang cantik namun tidak cerdas.
   b. Lisa gadis yang tidak cantik dan tidak cerdas.
   c. Meskipun Lisa bukanlah gadis yang cantik namun ia gadis yang cerdas.
   d. Lisa gadis yang cantik sekaligus juga gadis yang cerdas.
   e. Tidak benar bahwa Lisa gadis yang cantik dan cerdas.
   f. Jika Lisa gadis yang cantik maka ia tidak cerdas.
   g. Jika Lisa gadis yang tidak cantik maka ia tidak cerdas.

4. Buatlah negasi dari pernyataan ini.
   a. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
   b. $p \wedge q \Rightarrow (q \wedge \sim q \Rightarrow r \wedge q)$
   c. $\sim[(\sim p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow \sim q)] \wedge r$

BAGIAN III
KONVERS, INVERS, KONTRAPOSISI SUATU IMPLIKASI SERTA NEGASINYA

Pengertian dan Contohnya

Perhatikan pernyataan ini:

Jika suatu bendera adalah bendera RI maka ada warna merah pada bendera tersebut.

Bentuk umum implikasi di atas adalah: ‘$p \Rightarrow q$’ dengan **p**: Bendera RI, dan **q** : Bendera yang ada warna merahnya. Dari implikasi $p \Rightarrow q$ di atas, dapat dibentuk tiga implikasi lainnya, yaitu: (1) konversnya, yaitu $q \Rightarrow p$; (2) inversnya, yaitu $\sim p \Rightarrow \sim q$; dan (3) kontraposisinya, yaitu $\sim q \Rightarrow \sim p$. Dengan demikian; konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi “Jika suatu bendera adalah bendera RI maka ada warna merah pada bendera tersebut.” berturut-turut adalah:

1. Jika suatu bendera ada warna merahnya maka bendera tersebut adalah bendera RI ($q \Rightarrow p$).
2. Jika suatu bendera bukan bendera RI maka pada bendera tersebut tidak ada warna merahnya ($\sim p \Rightarrow \sim q$).
3. Jika suatu bendera tidak ada warna merahnya, maka bendera tersebut bukan bendera RI ($\sim q \Rightarrow \sim p$).

Tentukan nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisinya di atas. Hal menarik apa saja yang Anda dapatkan dari kegiatan c di atas? Berhentilah membaca naskah ini, cobalah untuk menjawab pertanyaan di atas. Nilai kebenaran dari implikasi, konvers, invers, dan kontraposisinya adalah:.

1. Untuk menentukan nilai kebenaran dari implikasi “Jika suatu bendera adalah bendera RI maka ada warna merah pada bendera tersebut”; maka yang perlu diperhatikan adalah antesedennya, yaitu: “Suatu bendera adalah bendera RI.” Serta kosekuennya yaitu tentang ada tidaknya warna merah pada bendera tersebut.
   Implikasi di atas bernilai sama dengan pernyataan berkuantor: “Semua/setiap bendera RI mesti ada warna merahnya.” Karena semua/setiap bendera RI akan selalu ada warna merahnya, maka implikasi di atas bernilai benar
2. Nilai kebenaran konversnya, dalam bentuk $q \Rightarrow p$, yaitu: “Jika suatu bendera ada warna merahnya maka bendera tersebut adalah bendera RI,” yang ekuivalen dengan pernyataan: “Setiap bendera yang ada warna merahnya adalah bendera RI.”
   Pernyataan terakhir ini bernilai salah karena dapat ditunjukkan beberapa bendera yang ada warna merahnya, yaitu bendera Jepang ataupun Polandia yang memenuhi persyaratan pada antesedennya, dimana bendera tersebut memiliki warna merah namun persyaratan pada konsekuennya tidak dipenuhi, yaitu bendera tersebut bukan bendera RI.
3. Nilai kebenaran inversnya, dalam bentuk $\sim p \Rightarrow \sim q$, yaitu: “Jika suatu bendera bukan bendera RI maka bendera tersebut tidak ada warna merahnya.” Sekali lagi, pernyataan di atas adalah ekuivalen dengan pernyataan: “Setiap bendera yang bukan bendera RI tidak ada warna merahnya.” Kalau begitu, tentukan nilai kebenaran invers ini.
4. Nilai kebenaran kontraposisinya, dalam bentuk $\sim q \Rightarrow \sim p$, yaitu: “Jika suatu bendera tidak ada warna merahnya, maka bendera tersebut bukan bendera RI.” Pernyataan di atas adalah ekuivalen dengan pernyataan: “Setiap bendera yang tidak ada warna merahnya adalah bukan bendera RI.” Pernyataan seperti ini jelas bernilai benar.

Dari soal di atas nampaklah bahwa nilai kebenaran dari implikasi serta kontraposisinya adalah sama nilainya, sedangkan nilai kebenaran konvers adalah sama dengan inversnya.

Ingkaran Implikasi, Konvers, Invers, dan Kontraposisinya.

Contoh soalnya adalah:

Tentukan ingkaran atau negasi dari implikasi: “Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih.”

Tentukan juga ingkaran dari konvers, invers, dan kontraposisi implikasi di atas.

Untuk menjawab pertanyaan tadi dan untuk menentukan negasi atau ingkaran konvers, invers, dan kontraposisi maka pengetahuan tentang negasi yang sudah dibahas di bagian depan sangat penting dan menentukan, terutama pengetahuan untuk menentukan negasi atau ingkaran soal nomor 1 s.d. 3 di bawah ini.

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $p \Rightarrow q$
4. $q \Rightarrow p$
5. $\sim p \Rightarrow \sim q$
6. $\sim q \Rightarrow \sim p$

Sebagai pengecek, bandingkan hasil yang Anda dapatkan dengan jawaban di bawah ini.

1. $\sim p \vee \sim q$
2. $\sim p \wedge \sim q$
3. $p \wedge \sim q$
4. $q \wedge \sim p$
5. $\sim p \wedge q$
6. $\sim q \wedge p$

1. Dengan demikian, ingkaran atau negasi dari implikasi “Jika suatu bendera adalah bendera RI maka bendera tersebut berwarna merah dan putih.” adalah:
   Ada atau terdapat bendera RI namun bendera tersebut tidak berwarna merah dan putih
2. Negasi atau ingkaran dari konvers, invers, dan kontraposisi suatu implikasi tadi berturut-turut adalah:
   a. Negasi konvers: Ada bendera berwarna merah dan putih namun bendera tersebut bukan bendera RI.
   b. Negasi invers: Ada bendera yang bukan bendera RI namun bendera tersebut berwarna merah dan putih
   c. Negasi kontraposisi: Ada bendera yang tidak berwarna merah dan putih namun bendera tersebut bendera RI

Latihan 3.1

1. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari implikasi berikut:
   a. Jika suatu bendera adalah bendera Jepang, maka ada bintang pada bendera tersebut.
   b. $a > 0 \Rightarrow a^3 > 0$
   c. $a = 0 \Rightarrow ab = 0$
   d. Jika dua persegipanjang kongruen maka luasnya sama.
   e. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
   f. Jika segitiga ABC adalah segitiga samasisi maka sisi-sisi segitiga tersebut sama panjang.
2. Tentukan nilai kebenaran implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi dari soal di atas.
3. Apa yang anda dapatkan dari hasil jawaban soal 2 itu?
4. Buatlah ingkaran dari implikasi, beserta konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut ini.
   a. Jika suatu bendera adalah bendera Jepang, maka ada bintang pada bendera tersebut.
   b. $a > 0 \Rightarrow a^3 > 0$
   c. $a = 0 \Rightarrow ab = 0$
   d. Jika dua persegipanjang kongruen maka luasnya sama.
   e. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
   f. Jika segitiga ABC adalah segitiga samasisi maka sisi-sisi segitiga tersebut sama panjang.
5. Apa yang anda dapatkan dari hasil jawaban soal 4 itu?

BAGIAN IV
PERNYATAAN BERKUANTOR

A. KALIMAT TERBUKA, PERNYATAAN, DAN KUANTOR

Perhatikan tiga kalimat berikut:

(1) $3 + 4 = 6$, (2) $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in A$, dan (3) $2x + 5 > 4, x \in A$

Tiga kalimat matematika seperti di atas dapat digunakan sebagai salah satu alternatif untuk memulai proses pembelajaran kuantor. Hanya kalimat pertama yang merupakan pernyataan. Kalimat kedua dan ketiga belum dapat ditentukan nilai kebenarannya sebelum peubah atau *variabel* x-nya diganti dengan salah satu anggota semesta pembicaraannya. Karenanya, kalimat kedua dan ketiga dikategorikan sebagai kalimat terbuka.

Apa yang terjadi jika terhadap suatu kalimat terbuka ditambahkan kata-kata seperti: "Untuk semua/ setiap x … "; "Beberapa/terdapat/ada x … "; dan "Tidak ada x …", sehingga untuk kalimat terbuka kedua didapat kalimat-kalimat berikut:

(1) *Untuk setiap/semua bilangan asli x,* $x^2 - 5x + 6 = 0$. *(2) Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *dan (3) Tidak ada bilangan asli x, sedemikian sehingga* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Sekarang, dapatkah Anda menentukan nilai kebenaran ke-tiga kalimat di atas?

Beberapa kata yang dikenal sebagai *kuantor (quantifier)* tersebut menunjukkan atau berkait dengan banyaknya pengganti peubah x, yaitu semua, beberapa, ataupun tidak ada; sehingga didapatkan suatu pernyataan berkuantor yang bernilai benar saja atau salah saja. Wheeler (1977:23) menyatakan: *"Quantifiers are most useful in rewriting assertions that cannot be classified as true or false … so that they can be classified either as true or false."* Ada dua jenis kuantor, yaitu kuantor universal (kuantor umum) dan kuantor eksistensial (kuantor khusus).

B. KUANTOR UNIVERSAL

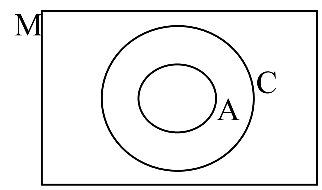
Kuantor jenis ini mempunyai lambang $\forall$ dan dibaca "untuk setiap" atau "untuk semua". Misalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka, pernyataan $\forall x \,.\, p(x)$ dibaca "untuk setiap x berlaku p(x)" atau "untuk semua x berlaku p(x)". Berikut ini adalah beberapa contoh pernyataan berkuantor universal:

1. '*Semua* artis adalah cantik.' Pernyataan berkuantor universal ini menggambarkan adanya dua himpunan, yaitu himpunan artis dan himpunan orang cantik. Di samping itu, pernyataan tadi menjelaskan tentang semua artis namun tidak menjelaskan tentang semua orang cantik. Pernyataaan itu menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan artis adalah merupakan anggota himpunan orang cantik, namun pernyataan itu tidak menjelaskan bahwa setiap anggota himpunan orang cantik adalah merupakan anggota himpunan artis. Hal terpenting yang pada akhirnya didapat adalah, pernyataan berkuantor: "*Semua* artis adalah orang cantik," menunjukkan bahwa himpunan artis termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan orang cantik.

   Pernyataan "*Semua* artis adalah cantik," ini akan bernilai benar jika telah ditentukan kriteria artis dan kriteria cantik serta dapat ditunjukkan bahwa setiap artis yang merupakan anggota himpunan artis adalah cantik. Namun pernyataan berkuantor universal tadi akan bernilai salah jika dapat ditunjukkan adanya satu atau beberapa orang yang dapat dikategorikan sebagai artis namun ia tidak termasuk pada kriteria cantik. Contoh yang menunjukkan salahnya suatu pernyataan berkuantor universal ini disebut dengan *counterexample* atau contoh sangkalan sebagaimana dinyatakan Clemens, O'daffer, dan Cooney (1984: 49) berikut: "*A counterexample is a single example that shows a generalization to be false* "

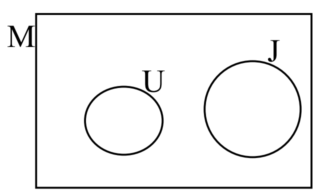
2. Jika p(x) adalah "x + 4 > 1" dengan x adalah peubah pada himpunan bilangan bulat B maka $(\forall x \in B)$ p(x) adalah $(\forall x \in B)$ x + 4 > 1 dan dibaca: "Untuk setiap bilangan bulat x berlaku x + 4 > 1." Pernyataan ini bernilai salah, karena jika x-nya diganti dengan bilangan bulat –5 misalnya akan didapat pernyataan –5 + 4 > 1 yang bernilai salah.
3. Jika q(n) berarti: $2^n - 1$ adalah bilangan prima untuk n bilangan bulat, maka $(\forall n \in B)$ q(n) berarti: $(\forall n \in B)$ $2^n - 1$ adalah bilangan prima, dan dibaca:
   "Untuk setiap bilangan bulat n berlaku $2^n - 1$ adalah bilangan prima".
   Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa salah?
4. $(\forall x \in R)$ $x^2 = x$, bernilai salah juga. Mengapa?

Jika pernyataan berkuantor universal, seperti *"Semua* artis adalah cantik" bernilai benar maka pernyataan itu dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut, John Venn (1834 – 1923) adalah seorang matematikawan Inggris yang menerbitkan buku tentang Logika Simbolik (*Symbolic Logic*) pada tahun 1881. Sebagaimana dijelaskan di bagian depan, himpunan artis A harus termuat atau menjadi himpunan bagian dari himpunan manusia cantik C; atau $A \subset C$. Paling tidak, A dan C bisa saja sama atau A = C; dengan M = {semua manusia}, A = {artis}, dan C = {cantik}.



Berdasarkan Diagram Venn di atas, para siswa diharapkan dapat menyimpulkan bahwa suatu pernyataan berkuantor universal dapat diubah menjadi suatu implikasi. Pada contoh di atas, pernyataan berkuantor universal: "Semua artis adalah cantik." adalah ekivalen dengan implikasi "Jika x adalah artis maka x adalah cantik.".

Sebagaimana dinyatakan di bagian depan, pernyataan berkuantor dengan kata awal "Tidak ada… ." dapat diubah ke bentuk pernyataan berkuantor universal. Contohnya, jika pernyataan berkuantor "Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek," bernilai benar, maka pernyataan tersebut dapat digambarkan dengan Diagram Venn berikut:



M = {semua manusia}
U = {murid SMU}
J = {manusia yang senang mendapat nilai jelek}.

Dengan demikian, jika pernyataan "Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek," bernilai benar dan jika digambarkan dengan Diagram Venn, pernyataan itu akan menyebabkan $U \cap J = \phi$. Alasannya, tidak ada satupun siswa SMU yang senang mendapat nilai jelek, sehingga kedua himpunan tersebut akan saling asing. Karenanya, pernyataan "Tiada murid SMU yang senang mendapat nilai ulangan jelek," itu adalah sama dengan pernyataan berkuantor universal: "Semua murid SMU tidak senang mendapat nilai ulangan jelek."

C. KUANTOR EKSISTENSIAL

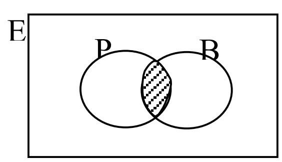
Kuantor jenis ini mempunyai lambang $\exists$ dan dibaca "beberapa", "terdapat", atau "ada". Jika dimisalkan p(x) adalah suatu kalimat terbuka maka $\exists x$ p(x) dibaca "untuk beberapa x berlaku p(x)" atau "ada x sedemikian sehingga berlaku p(x)". Perhatikan contoh berikut:

1. "Terdapat bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 - 5x + 6 = 0$," atau "Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$."

Kata “beberapa (*some*)” menurut Copi (1978:179) adalah *indefinite* atau tidak terdefinisikan secara jelas. Apakah kata “beberapa” berarti “paling sedikit satu,” “paling sedikit dua,” ataukah berarti “paling sedikit seratus”?. Pernyataan Copi (1978:179) berikut dapat dijadikan sebagai acuan, yaitu: “*For the sake of definiteness, although this may depart from ordinary usage in some cases, it is customary to regard the word “some” as meaning “at least one”.”* Karena itu, meskipun dapat berbeda dengan pengertian sehari-hari, kata ‘beberapa’ adalah berarti “paling sedikit satu”. Dengan demikian, untuk menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah cukup dengan menunjukkan adanya satu anggota Himpunan Semesta yang memenuhi. Karena dapat ditunjukkan bahwa untuk x = 2 atau x = 3 memenuhi persamaan $x^2 - 5x + 6 = 0$ sehingga dapat disimpulkan bahwa pernyataan berkuantor eksistensial “Beberapa bilangan asli x memenuhi $x^2 - 5x + 6 = 0$,” memiliki nilai benar.

2. Jika p(x) adalah “$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan asli A, ” maka $(\exists x \in A)\ p(x)$ adalah $(\exists x \in A)\ x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca “Ada bilangan asli x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$”. Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?
3. Jika p(x) adalah “$x^2 + 4x + 3 = 0$ dengan x bilangan real R, ” maka $(\exists x \in R)\ p(x)$ adalah $(\exists x \in R)\ x^2 + 4x + 3 = 0$ yang dibaca “Ada bilangan real x sedemikian sehingga $x^2 + 4x + 3 = 0$”. Pernyataan ini bernilai benar. Mengapa?
4. $(\exists x \in B)\ 2x + 3 = 4$. Pernyataan ini bernilai salah. Mengapa?

Pernyataan berkuantor eksistensial “Ada pria yang baik,” menunjukkan adanya himpunan manusia sebagai himpunan semestanya (E), adanya himpunan pria (P) dan adanya himpunan manusia yang baik (B). Jika pernyataan berkuantor eksistensial “Ada pria yang baik,” bernilai benar maka dapat ditarik suatu kesimpulan akan adanya anggota Himpunan Semesta (minimal satu anggota) yang merupakan anggota himpunan pria dan juga merupakan anggota manusia yang baik. Artinya, kedua himpunan tersebut tidak saling asing. Dengan demikian, $P \cap B \neq \phi$, yang dapat ditunjukkan dengan Diagram Venn berikut.



E = {semua manusia}
P = {semua pria}
B = {semua orang baik}.

Berdasar Diagram Venn di atas yang menunjukkan $P \cap B \neq \phi$, maka pernyataan berkuantor eksistensial dapat dinyatakan dalam bentuk konjungsi. Contohnya, pernyataan berkuantor eksistensial.

“Ada pria yang baik,”

adalah sama dengan konjungsi berikut:

“Ada x sedemikian sehingga x adalah pria dan x adalah baik”.

Latihan 4.1

1. Dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, tentukan nilai x yang akan menyebabkan kalimat terbuka di bawah ini menjadi benar,

a. $2x - 4 = -5$
b. $x + 2 = -5$
c. $x^2 - 16 = 0$
d. $x + 3 = 3 + x$

2. Dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan bulat, gunakan kuantor dengan urut-urutan: “Semua…”, “Beberapa…”, “Tidak ada…”, pada kalimat terbuka di atas, sehingga didapat pernyataan berkuantor yang bernilai benar.
3. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini.
a. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.
b. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
c. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
d. Setiap bilangan memiliki lawan (invers penjumlahan).
e. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
f. Setiap persegi adalah jajargenjang.
g. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
h. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika ditambahkan ke bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
i. Terdapat bilangan sedemikian sehingga setiap bilangan jika dibagi dengan bilangan tersebut akan menghasilkan bilangan itu sendiri.
j. Setiap jajargenjang memiliki simetri setengah putaran.
k. Beberapa siswa menganggap matematika sulit.
l. Setiap tahun yang habis dibagi 4 adalah tahun kabisat.
4. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real.

a. $\exists x\ (x^2 = x)$	e. $\exists x\ (x^2 - 2x + 1 = 0)$
b. $\exists x\ (\lvert x\rvert = 0)$	f. $\forall x\ (x^2 + 2x + 1 > 0)$
c. $\forall x\ (x < x + 1)$	g. $\exists x\ (\lvert x\rvert \geq 0)$
d. $\forall x\ (x - 1 = x)$	h. $\forall x\ (x^2 - 3x + 2 = 0)$

5. Tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan di atas dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan asli.
6. Dengan menggunakan huruf yang disarankan, buatlah Diagram Venn-nya lalu tulis implikasi atau konjungsi yang sesuai dengan pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Senua anjing mempunyai empat kaki (A, K).
   b. Beberapa matriks tidak memiliki invers (M, I).
   c. Semua laki-laki dapat dipercaya (L, P).
   d. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi (K, S).
   e. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk (P, D).
7. Tentukan nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini dengan semesta pembicaraannya adalah $X = \{1,2,3,4,5\}$.
a. $\forall x\ (4 + x < 10)$
b. $\exists x\ (4 + x = 7)$
c. $\forall x\ (4 + x \leq 7)$
d. $\exists x\ (4 + x > 8)$

D. NEGASI PERNYATAAN BERKUANTOR UNIVERSAL

Telah dibahas di bagian depan tentang beberapa contoh pernyataan berkuantor universal, seperti:

r : Semua Guru Indonesia kaya.

s : Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri.

Sebagai seorang guru. apa komentar Anda terhadap pernyataan r di atas? Mungkin Bapak atau Ibu akan menyatakan “Yang benar saja, masak saya yang berprofesi guru sampai saat ini belum punya rumah termasuk orang kaya?” Hal ini menunjukkan bahwa satu orang guru yang tidak termasuk kategori kaya dapat dijadikan dasar untuk mengingkari atau menegasikan pernyataan berkuantor tadi. Dengan demikian, negasi dari pernyataan berkuantor universal tadi adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang dapat dipenuhi oleh minimal satu orang saja yang tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Jadi, negasi atau ingkaran "Semua Guru Indonesia kaya" adalah pernyataan berkuantor eksistensial yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu "Beberapa Guru Indonesia tidak kaya"

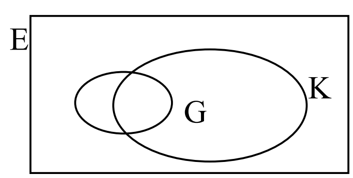
Dengan cara sama, negasi atau ingkaran dari pernyataan berkuantor universal "Semua bilangan jika dibagi 1 akan menghasilkan bilangan itu sendiri," dengan nilai benar adalah pernyataan berkuantor eksistensial "Beberapa bilangan jika dibagi 1 akan tidak menghasilkan bilangan itu sendiri." Negasi atau ingkaran dari "Semua bunga indah" adalah "Tidak benar bahwa semua bunga indah" atau "Beberapa bunga tidak indah". Dengan simbol, negasi dari "$\forall x\ (x^2 \geq 0)$" adalah "$\exists x\ (x^2 < 0)$". Secara umum negasi pernyataan kuantor universal dapat dinyatakan sebagai berikut:

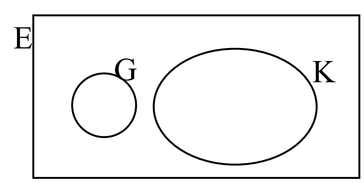
Pernyataan	**Negasi**
$\forall x\ p(x)$	$\sim (\forall x\ p(x)) \equiv \exists x\ \sim p(x)$

E. NEGASI PERNYATAAN BERKUANTOR EKSISTENSIAL

Beberapa contoh pernyataan berkuantor eksistensial adalah: "Beberapa Guru Indonesia kaya," dan "Beberapa segitiga merupakan segitiga siku-siku samakaki." Di dalam kehidupan sehari-hari, jika ada orang yang menyatakan di depan Bapak atau Ibu Guru bahwa "Beberapa Guru Indonesia kaya", apa yang Bapak atau Ibu akan lakukan? Mungkin Bapak atau Ibu akan menyatakan "Memang benar bahwa beberapa Guru Indonesia kaya". Pernyataan lain yang jelas salahnya dari pernyataan tadi adalah "Semua Guru Indonesia tidak kaya." Dengan demikian, negasi dari suatu pernyataan berkuantor eksistensial adalah pernyataan berkuantor universal yang seluruh anggotanya tidak memenuhi kriteria kaya tadi. Intinya, negasi atau ingkaran "Beberapa Guru Indonesia kaya" adalah pernyataan berkuantor universal yang tidak memenuhi kriteria kaya, yaitu "Semua Guru Indonesia tidak kaya" yang bernilai salah.

Hal ini dapat diperjelas dengan Diagram Venn di bawah ini. Pernyataan berkuantor "Beberapa Guru Indonesia kaya", menunjukkan adanya (paling sedikit satu dan tidak tertutup kemungkinan untuk semua) anggota himpunan Guru Indonesia (G) yang sekaligus merupakan himpunan bagian dari himpunan orang-orang kaya (K), sebagaimana ditunjukkan pada Diagram Venn di sebelah kiri bawah ini. Karena itu, negasinya adalah pernyataan "Semua Guru Indonesia tidak kaya" sebagaimana ditunjukkan pada Diagram Venn di sebelah kanan bawah ini.





Dengan cara sama, negasi atau ingkaran dari pernyataan "Beberapa segitiga merupakan segitiga siku-siku samakaki," dengan nilai benar adalah "Semua segitiga tidak ada yang merupakan segitiga siku-siku samakaki." Negasi dari pernyataan "Ada siswa yang senang matematika" adalah "Tidak benar bahwa ada siswa yang senang matematika" atau "Semua siswa tidak senang matematika". Secara umum negasi pernyataan kuantor eksistensial dapat dinyatakan sebagai berikut:

Pernyataan	Negasi
$\exists x\ p(x)$	$\sim (\exists x\ p(x) \equiv \forall x\ \sim p(x)$

Latihan 4.2.

1. Tentukan negasi dari pernyataan berikut:
    a. $\exists x\ (x^2 = x)$
    b. $\exists x\ (|x| = 0)$
    c. $\forall x\ (x < x + 1)$
    d. $\forall x\ (x - 1 = x)$
    e. $\exists x\ (x2 - 2x + 1 = 0)$
    f. $\forall x\ (x2 + 2x + 1 > 0)$
    g. $\exists x\ (|x| \geq 0)$
    h. $\forall x\ (x2 - 3x + 2 = 0)$

2. Tuliskan negasi pernyataan-pernyataan berikut:
    a. Semua laki-laki dapat dipercaya.
    b. Ada segitiga sama kaki yang bukan segitiga sama sisi.
    c. Beberapa matriks tidak memiliki invers.
    d. Setiap perwira TNI adalah laki-laki.
    e. Beberapa Gubernur di Indonesia adalah perempuan.
    f. Setiap bilangan jika dipangkatkan 0 akan bernilai sama dengan 1.
    g. Setiap bilangan memiliki kebalikan (invers perkalian).
    h. Setiap jajargenjang adalah trapesium.
    i. Tidak semua pulau di Indonesia didiami oleh penduduk.
3. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut, lalu tentukan nilai kebenaran negasi pernyataan itu dengan semesta pembicaraannya adalah $X = \{1,2,3,4,5\}$.
    a. $\forall x\ (4 + x < 10)$
    b. $\exists x\ (4 + x = 7)$
    c. $\forall x\ (4 + x \leq 7)$
    d. $\exists x\ (4 + x > 8)$
4. Tentukan negasi pernyataan-pernyataan berikut ini.
    a. $\exists x\ p(x) \Lambda \forall y\ q(y)$
    b. $\forall x\ p(x) \Rightarrow \forall y\ q(y)$
    c. $\forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y)$
    d. $\exists x\ p(x) \Rightarrow \exists y\ \sim q(y)$

Daftar Pustaka

Copi, I.M. (1978) *Introduction to Logic.* New York: Macmillan.

Giere, R. N. (1984). *Understanding Scientific Reasoning (2nd Edition).* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Kusumah, Y.S. (1986). *Logika Matematika Elementer.* Bandung: Tarsito.

Krismanto, Al. (1991). *Prima EBTA Matematika SMA.* Klaten: PT Intan Pariwara.

Lipschutz, S; Silaban, P. (1985). *Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Prayitno, E. (1995). *Logika Matematika.* Yogyakarta: PPPG Matematika.

Soekardijo, R.G. (1988). *Logika Dasar, Tradisionil, Simbolik dan Induktif.* Jakarta:: Gramedia.

Suriasumantri, J.S. (1988). *Filsafat Ilmu.* Jakarta: Sinar Harapan.

Tirta Seputro, Theresia (1992). *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan.* Jakarta: Erlangga.

Tim Matematika (1980). *Matematika 12 untuk SMA.* Jakarta : Depdikbud.Vance, E. P. (19..). *Modern College Algebra.* London : Addison Wesley.