PENGANTAR KALKULUS

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA
Jenjang Dasar
Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika

Oleh:
Drs. SETIAWAN, M. Pd.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

===

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

DAFTAR ISI

Halaman

BAGIAN I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang.

Tujuan khusus pengajaran matematika di Sekolah Menengah Umum (SMU) adalah :

a. Siswa memiliki pengetahuan matematika sebagai bekal untuk melanjutkan ke pendidikan tinggi.

b. Siswa memiliki keterampilan matematika sebagai peningkatan matematika Pendidikan Dasar untuk dapat digunakan dalam kehidupan yang lebih luas (di dunia kerja) maupun dalam kehdupan sehari-hari.

c. Siswa mempunyai pandangan yang lebih luas serta memiliki sikap menghargai kegunaan matematika, sikap kritis, logis, obyektif, terbuka, kreatif serta inovatif.

d. Siswa memiliki kemampuan yang dapat dialih gunakan (transferable) melalui kegiatan matematika di SMU.

Memperhatikan butir-butir tujuan khusus tersebut di atas, maka kedudukan kalkulus dalam Garis-garis Besar Program Pengajaran SMU akan menjadi cukup sentral, sehingga materi ini harus mendapatkan perhatian yang cukup serius menyangkut masalah penguasaan materi, pemilihan metoda pembelajaran yang pas dan penentuan strategi serta teknik mengajar yang serasi.

Namun demikian melihat kenyataan di lapangan baik lewat monitoring dan evaluasi bagi para alumnus penataran di PPPG Matematika maupun diskusi-diskusi di MGMP, ternyata materi ini kadang-kadang masih dijumpai kendala di lapangan. Oleh karena itu pembahasan mengenai materi kalkulus ini perlu mendapatkan porsi yang memadai pada penataran-penataran guru matematika, terutama yang diselengggarakan oleh PPPG Matematika Yogyakarta.

Di samping itu kalkulus merupakan salah satu materi yang memiliki cakupan aplikasi yang sangat luas, baik dalam tubuh matematika itu sendiri, maupun dalam cabang-cabang lmu-ilmu yang lain, seperti dalam bidang sains, teknologi, ekonomi dan sebagainya. Oleh karena itu para siswa terlebih-lebih guru matematika SMU harus mendapat bekal materi kalkulus ini sebaik-baiknya.

B. Tujuan Penulisan

Tulisan ini disusun dengan maksud untuk memberikan tambahan pengetahuan berupa wawasan kepada guru matematika SMU dengan harapan :

1. lebih memahami materi kalkulus untuk SMU dan beberapa pengembangannya, terutama masalah limit fungsi, integral dengan substitusi dan integral parsial yang ternyata nasih banyak dijumpai kendala di lapangan.
2. dapat digunakan sebagai salah satu referensi masalah-masalah pengajaran matematika SMU pada pertemuan-pertemuan MGMP Matematika SMU di daerah.
3. memperluas wawasan keilmuan dalam matematika, dan khusunya masalah kalkulus SMU, sehingga guru dapat memilih strategi pembelajaran yang sesuai dengan kondisi di lapangan, sehingga mudah diterima oleh siswa.

C. Sasaran

Tulisan ini disusun untuk menjadikan bahan penambah wawasan :

a. para peserta penataran guru-guru matematika SMU, oleh PPPG Matematika Yogyakarta.
b. para rekan guru matematika SMU pada umunya dan juga para pemerhati pengajaran matematika.

D. Ruang Lingkup Penulisan.

Ruang lingkup bahan penataran ini meliputi

a. limit fungsi dan kontinuitas.
b. kalkulus diferensial, dan
c. integral tak tentu serta integral tertentu beserta aplikasinya.

E. Pedoman Penggunaan.

Bahan penataran ini merupakan salah satu acuan dalam memahami materi tentang kalkulus, untuk memahami isi paket ini dengan baik hendaknya terlebih dulu dicermati uraian materi beserta contoh-contohnya dengan seksama, kemudian baru mencoba soal-soal latihan yang telah disediakan, sesuai dengan topik yang tengah didalaminya.

BAGIAN II
LIMIT FUNGSI

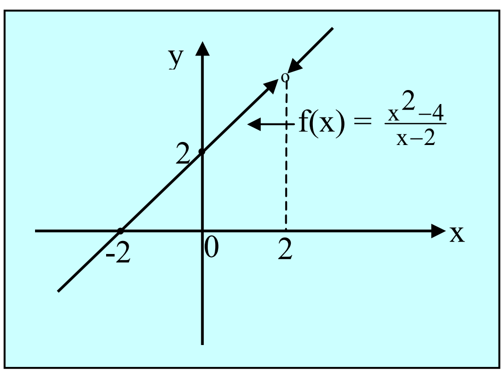
A. Latar Belakang

Kalkulus adalah salah satu cabang dari matematika yang sangat penting dan banyak diterapkan secara luas pada cabang-cabang ilmu pengetahuan yang lain, misalnya pada cabang sains dan teknologi, pertanian, kedokteran, perekonomian dan sebagainya. Pada makalah ini akan dibahas tiga pokok bahasan, pokok utama dari kalkulus yakni limit fungsi, diferensial fungsi dan integral fungsi. Sebenarnya ada dua cabang dalam kalkulus itu sendiri, yakni kalkulus diferensial dan kalkulus integral, dan jika diperhatikan inti dari pelajaran kalkulus adalah memakai dan menentukan limit suatu fungsi. Bahkan secara ekstrim kalkulus dapat didefinisikan sebagai pengkajian tentang limit. Oleh karena itu pemahaman tentang konsep dan macam-macam fungsi diberbagai cabang ilmu pengetahuan serta sifat-sifat dan operasi limit suatu fungsi merupakan syarat mutlak untuk memahami kalkulus diferensial dan kalkulus integral.

B. Limit Fungsi Aljabar

1. Limit Fungsi secara Intuitif**.**

Perhatikan contoh di bawah ini



Gb.1.1

Pandanglah fungsi

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ dengan domain

$D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$ untuk x = 2, jika dicari nilai fungsi

$f(2) = \dfrac{0}{0}$ = tidak tentu .

Kita cari nilai-nilai f(x) untuk x mendekati 2.

Kita dapat memperhatikan nilai fungsi f(x) disekitar x = 2 seperti tampak pada tabel. berikut :

x	1,90	1,99	1,999	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1
f(x)	3,90	3,99	3,999	3,999	…		…	4,001	4,01	4,1

Dari tabel di atas dapat disimpulkan bahwa untuk x mendekati 2 baik dari kiri maupun dari kanan, nilai fungsi tersebut makin mendekati 4, dan dari sini dikatakan bahwa limit f(x) untuk x mendekati 2 sama dengan 4, dan ditulis

$$\lim_{n\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 .$$

Dari pengertian inilah yang disebut pengertian limit secara intuitif, sehingga :

Definisi limit secara intuitif, bahwa $\lim\limits_{n \to c} f(x) = L$ artinya bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka f(x) dekat ke L.

2. Limit Fungsi Secara Formal

Secara matematis dapat dimaklumi bahwa banyak yang berkeberatan dengan definisi limit secara intuitif di atas, yaitu penggunaan istilah "dekat". Apa sebenarnya makna dekat itu ?. Seberapa dekat itu dapat dikatakan "dekat" ?.

Untuk mengatasi masalah di atas Augustin-Louis Cauchy berhasil menyusun definisi tentang limit seperti di bawah ini yang masih kita gunakan sampai sekarang.

Pengertian limit secara intuitif di atas jika diberi definisi formal adalah sebagai berikut.

Definisi :

Dikatakan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L$, adalah bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan berapapun kecilya, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian hingga $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ untuk setiap $0 < \lvert x - c \rvert < \delta$.

Dengan menggunakan definisi limit di atas dapat dibuktikan teorema-teorema pokok tentang limit suatu fungsi sebagai berikut :

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$, jika k suatu konstanta.
2. $\lim\limits_{x \to c} (ax + b) = ac + b$
3. $\lim\limits_{x \to c} k\, f(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} f(x).g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x).\lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. Hukum substitusi :
   Jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(L)$, maka $\lim\limits_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$ jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$.
8. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$.
9. Teorema Apit :
   Misalkan $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pada setiap interval yang memuat c dan dipenuhi :
   $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$.

Bukti-bukti dari teorema-teorema limit utama di atas adalah :

1. Buktikan $\lim_{k \to c} k = k$.

   Bukti : Untuk setiap bilangan positip ε > 0 berapapun kecilnya akan didapat δ > 0 sedemikian untuk setiap x pada |x – c| < δ dipenuhi |k – k| < ε. Dari |k – k| = 0, maka berapapun nilai δ > 0 yang diambil yang menyebabkan |x – c| < δ akan berakibat |k – k| < ε.

2. Buktikan $\lim_{x \to c} (ax + b) = ac + b$.

   Bukti :
   Untuk membuktikan teorema ini, berarti jika diberikan suatu ε > 0 betapapun kecilnya, akan ditemukan δ > 0 sedemikian hingga 0 < |x – c| < δ ⇒ |(ax + b) – (ac + b)| < ε.
   Sekarang dari |(ax + b) – (ac +b)| = |ax – ac| = |a(x – x)| ≤ |a|| x – c|.
   Kelihatan bahwa $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ akan memenuhi persyaratan di atas.

   Sehingga jika diberikan ε > 0 betapapun kecilnya dan dipilih $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ maka

   0 < |x – c| < δ menunjukkan :

   $|(ax + b) - (ac - b)| = |ax - ac| = |a(x - c)| < |a||x - c| < |a| \dfrac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$

   Dengan demikian terbuktilah teoremanya.

3. Buktikan : $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

   Bukti :
   Misalkan $\lim_{x \to c} f(x) = L$
   Misalkan diberikan ε > 0, kita harus mendapatkan δ > 0 sedemikian hingga

   0 < |x – c| < δ berakibat $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$ (mengingat $\dfrac{\varepsilon}{|k|} > 0$ juga).

   Sekarang dengan telah ditetapkan δ, kita dapat menyatakan bahwa untuk setiap x yang terletak 0 < |x – c| < δ berlaku : $|k\, f(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k| \dfrac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$.

   Ini menunjukkan bahwa :

   $\lim_{x \to c} k\, f(x) = kL = k \lim_{x \to c} f(x)$.

4. Buktikan $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

<u>Bukti</u> :

Andaikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$.

Jika ε sebarang bilangan positip yang diberikan, maka $\frac{\varepsilon}{2}$ adalah positip.

Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L,$ maka terdapat suatu bilangan positip δ, sedemikian hingga:

$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Karena $\lim_{x \to c} g(x) = M,$ maka terdapat suatu bilangan positip δ_2 sedemikian hingga :

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, yaitu pilih δ sebagai yang terkecil diantara δ_1 dan δ_2, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Jadi $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$.

Dengan jalan yang sama akan dapat dibuktikan bahwa :

$\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$.

5. Buktikan : $\lim_{x \to c} f(x).g(x) = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x)$.

<u>Bukti</u> :

Misal $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$.

Jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{\varepsilon}{2(|L|+1} > 0$ dan $\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} > 0$.

Yang akan kita tunjukkan dengan pembuktian ini adalah jika diberikan $\varepsilon > 0$, kita harus mendapatkan bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk :

$0 < |x - a| < \delta$ berakibat $|f(x) . g(x) - L . M| < \varepsilon$.

Untuk :

$|f(x) . g(x) - L . M| = |f(x) . g(x) - L . g(x) + L . g(x) - L . M| \leq |g(x)| . |f(x) - L| + |L| g(x) - M| \ldots (2)$.

Dari $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(|M|+1)}$ … (3)

Dan dari $\lim_{x \to c} g(x) = M$, berarti terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - x| < \delta_2$ berakibat $|g(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(|L|+1}$ … (4).

Selanjutnya terdapat bilangan ketiga $\delta_3 > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta_3$ berakibat $|g(x) - M| < 1$ yang berarti $|g(x)| < |M| + 1$ …….(5)

Sekarang kita pilih δ bilangan terkecil dari ketiga bilangan positip δ_1, δ_2 dan δ_3. Dan jika substitusi (3), (4) dan (5) ke dalam (2), akan diperoleh jika $|x - c| < \delta$ berakibat :

$$|f(x) . g(x) - LM \leq |g(x)| . |f(x0 - L| + |L| . |g(x) - M|$$

$$< (|M + 1| . \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} + |L| . \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Kenyataan ini berarti terbukti bahwa :

$$\lim_{x \to c} f(x) . g(x) = L.M = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x)$$

6. Buktikan jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, maka $\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$.

   Bukti :

   Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$, kita harus mendapatkan suatu bilangan $\delta > 0$ sedemikian hingga apabila $0 < |x - a| < \delta$ berakibat $|f(g(x) - f(L)| < \varepsilon$.

   Dari $\lim_{y \to L} f(y) = L$, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga, untuk $0 < |y - L| < \delta_1$ akan berakibat $|f(y) - f(L)| < \varepsilon$ ………. (1).

   Dan dari $\lim_{x \to c} g(x) = L$, kita dapat memilih $\delta > 0$ sedemikian hingga jika $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $|g(x) - L| < \delta_1$ atau $|y - L| < \delta_1$ dimana $y = g(x)$.

   Dari (1) dapat kita lihat bahwa :

   Jika $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $|f(g(x)) - f(L)| = |f(y) - f(L)| < \varepsilon$.

   Kenyataan terakhir ini, menyajikan bukti tersebut.

7. Buktikan : Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan $L \neq 0$ maka $\lim_{x \to c} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L}$.

   Bukti :

   Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$, kita akan menemukan $\delta > 0$ sedemikian hingga, apabila dipenuhi $0 < |x - c| < \delta$ berakibat $\left| \dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{L} \right| < \varepsilon$.

Sekarang $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - g(x)}{L\,.\,g(x)}\right|$.

Dari $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} h\,.\,g(x) = L^2$.

Dengan definisi limit, jika diambil $\varepsilon = \frac{L^2}{2}$. akan diperoleh δ_1 sedemikian hingga, japabila $0 < |x - c| < \delta_1$ dipenuhi $|\,L\,.\,g(x) - L^2| < \varepsilon$ atau $L^2 - \varepsilon < L\,.\,g(x) < L^2 + \varepsilon$ dan jika diambil $\varepsilon = \frac{L^2}{2}$ maka $\frac{L^2}{2} < L\,.\,g(x) < \frac{3L^2}{2}$.

Dari sini berarti L . g(x) positip, sehingga kita peroleh $\frac{2}{L^2} > \frac{1}{L.g(x)}$ untuk $0 < |x - c| < \delta_1$.

Selanjutnya :

$\left|\frac{L - g(x)}{L.g(x)}\right| = \frac{|\,L - g(x)\,|}{L.g(x)} < \frac{2}{L^2}\,|\,L - g(x)\,|$ untuk $0 < |\,x - c\,| < \delta_1$.

Terakhir diperoleh δ_2, sedemikian hingga untuk setiap x yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|L - g(x)| < \frac{\varepsilon L^2}{2}$. Jika diambil δ yang terkecil dari δ_1 dan δ_2 maka untuk setiap x yang memenuhi : $0 < |x - c| < \delta$ berakibat :

$\left|\frac{L - g(x)}{L.g(x)}\right| < \frac{2}{L^2}\,|\,L - g(x)\,| < \frac{2}{L^2}\,.\,\frac{\varepsilon L^2}{2} = \varepsilon.$

Ini menunjukkan bukti bahwa $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$ jika $L \neq 0$.

8. Buktikan : $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

Bukti :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x)\,.\,\frac{1}{g(x)}$$

$$= \lim_{x \to c} f(x)\,.\,\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} \quad \text{jika } \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$$

$$= \lim_{x \to c} f(x)\,.\,\frac{1}{\lim\limits_{x \to c} f(x)} \quad \text{jika } \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

9. Buktikan teorema apit, bahwa jika $f(x) \le g(x) \le h(x)$ pada interval yang memuat c dan dipenuhi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$ maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$.

   Bukti :

   Jika diberikan $\varepsilon > 0$, akan kita dapatkan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga :
   Jika $0 < |x - c| < \delta_1$ berakibat $|f(x) - L| < \varepsilon$, dan jika $0 < |x - c| < \delta_2$ berakibat $|h(x) - L|$ ε. Dan jika kita pilih $\delta > 0$ yang terkecil dari dua bilangan δ_1 dan δ_2 maka jika dipenuhi $0 < |x - c| < \delta$ berakibat f(x) dan g(x) keduanya terletak pada interval terbuka $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

   Sehingga :

   $$L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon.$$

   Jadi jika :

   $$0 < |x - c| < \delta \text{ berakibat } |g(x) - L| < \varepsilon.$$

   Ini menunjukkan bahwa teorema apit telah terbukti.

Contoh 1.

Hitung $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 3x + 8)$

Jawab : Dengan menggunakan teorema substitusi

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x + 8) = 2^2 - 3.2 + 8 = 6$$

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

Jawab : Faktorkan dulu sebab jika disubstitusikan langsung diperoleh $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)}$$ karena $x \neq -4$ maka pecahan dapat disederhana - kan.

$$= \lim_{x \to -4} x - 3$$

$$= -4 - 3 = -7$$

Contoh 3.

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{\sqrt{4}-2}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} \quad \text{karen } x \neq 2$$

$$= \lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)$$

$$= \sqrt{4}+2 = 4$$

Cara ii, misalkan $\sqrt{x} = y \to x = y^2$

untuk $x \to 4$ maka $y \to 2$, sehingga soal di atas menjadi

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y\to 2}\frac{y^2-4}{y-2}$$

$$= \lim_{y\to 2}\frac{(y+2)(y-2)}{(y-2)}$$

$$= 2+2 = 4$$

Contoh 4 :

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2}$

Penyelesaian :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2x})}{(x-2)}.\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(2+x)-(2x)}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2x})}$$

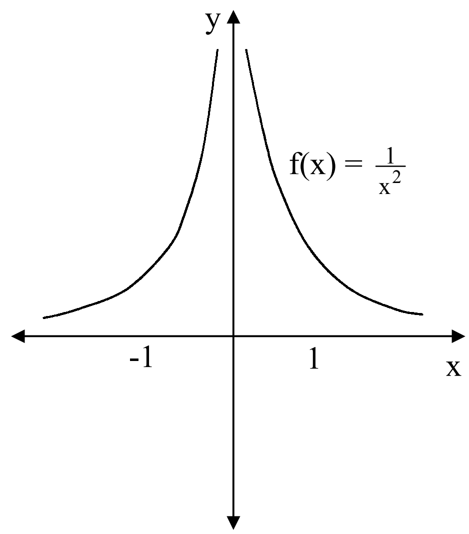
$$= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2x}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

3. Pengertian Limit di Tak Hingga.

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ yang domainnya semua bilangan real yang tidak nol. Jika kita cari nilai-nilai fungsi dekat dengan 0.

x	$\frac{1}{x^2}$
1	1
0,1	100
0,01	10.000
0,001	1000 10^6
0,0001	10.000 10^8
↓	↓
0	besar sekali disebut tak hingga
↑	↑
-0,0001	10.000 10^8
-0,001	1000 10^6
-0,01	100 10.000
-0,1	10 100
-1	1



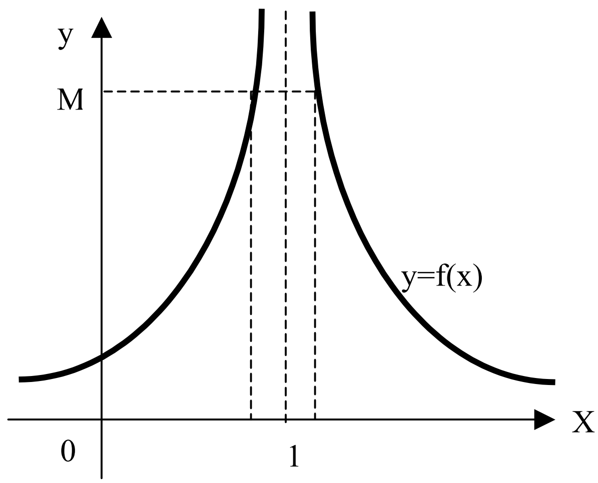
Apabila x suatu bilangan baik positip maupun negatif yang sangat kecil maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi sangat besar, semakin dekat x dengan nol, maka nilai $\frac{1}{x^2}$ menjadi semakin besar sekali, sehingga dikatakan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \sim$.

Catatan :
Simbol ~ dibaca "tak hingga" digunakan untuk melambangkan bilangan yang sangat besar yang tak dapat ditentukan besarnya, tetapi simbol ini tidak menunjuk suatu bilangan real yang manapun.

Pengertian ketak hinggaan sebagaimana dipaparkan secara intuitif di atas secara formal didefinisikan sebagai berikut :
Definisi :

Fungsi f(x) mendekati tak hingga untuk $x \to c$ apabila untuk setiap bilangan positip M betapapun besarnya, adalah mungkin menemukan bilangan $\delta > 0$

sedemikian hingga untuk setiap x selain c jika dipenuhi |x – c| < δ akan berakibat |f(x)| > M dan ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = \sim$.



Contoh 1 :

Buktikan bahwa $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\sim$

Bukti :

Untuk membuktikan itu berarti untuk setiap M > 0 yang diberikan betapapun besarnya adalah mungkin menemukan δ > 0 sedemikian hingga untuk setiap x yang memenuhi |x – 1| < δ akan diperoleh $\frac{1}{(1-x)^2} > M.$

Dari $\frac{1}{(1-x)^2} > M.$ berarti $(1-x)^2 < \frac{1}{M}$.

Sehingga $|1 - x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Jika diambil $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, berarti untuk setiap x pada $|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ akan dipenuhi

$\Leftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 < \frac{1}{M}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} > M.$

Dari pertidaksamaan terakhir ini menunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\sim$.

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$

Jawab : Secara intuitif jika x dekat dengan 1 maka x – 1 akan mendekati 0, sehingga dapat difahami (secara intuitif) bila $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$

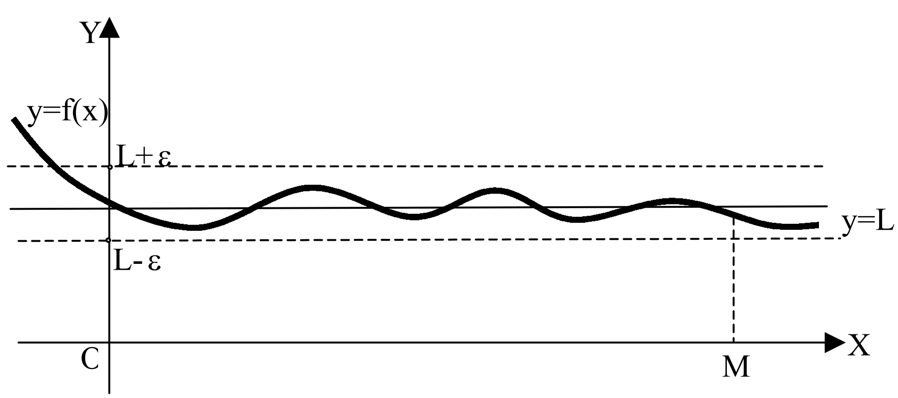
Dan jika ingin dibuktikan secara formal berarti untuk setiap bilangan M > 0 betapapun besarnya, adalah mungkin ditemukan $\delta > 0$, sedemikian hingga untuk setiap x pada $|x - 1| < \delta$ akan dipenuhi $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| > M$.

Sedangkan limit fungsi untuk x yang bernilai besar dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi :

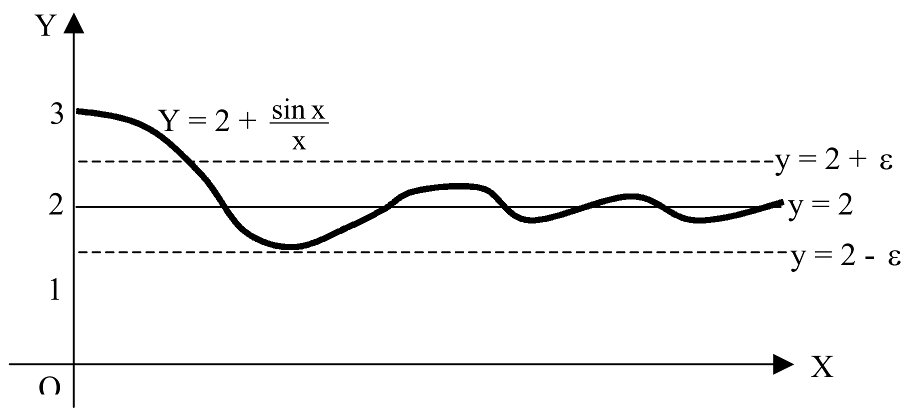
> Jika f(x) terdefinisi untuk x yang bernilai besar, kita katakan bahwa f(x) mendekati L sebagai limit untuk x mendekati tak hingga, dan ditulis :
>
> $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, bahwa apabila diberikan $\varepsilon > 0$ maka akan ditemukan suatu bilangan M sedemikian hingga dipenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$ apabila $x > M$.

Ilustrasi geometris dari pengertian di atas adalah sebagai berikut :



Contoh 1.

Pandanglah fungsi $f(x) = 2 + \frac{\sin x}{x}$



Grafiknya beroskilasi terhadap garis y = 2.

Amplitudo dari oskilasinya semakin kecil menuju nol.

Untuk $x \to \infty$, dan kurvanya terletak di antara $y = 2 + \varepsilon$ dan $y = 2 - \varepsilon$ jika $x > M$

Atau dengan kata lain :

Jika x besar, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ dan $f(x) \to L = 2$

Contoh 2

Tentukan $\lim\limits_{x \to \sim} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x})$

Jawab :

$$\lim_{x\to\sim}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x\to\sim}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x})}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\frac{(x^2+2x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

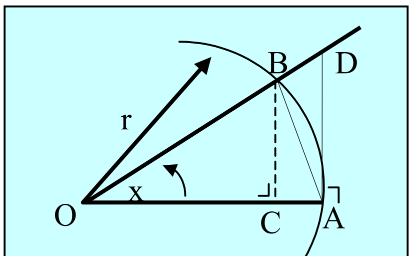
$$= \lim_{x\to\sim}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x\to\sim}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

C. Limit Fungsi Trigonometri



Gb.1.3

Misalkan x dalam radian, dan $0 < x < \frac{\pi}{2}$, maka

BC = r sin x dan AD = r tan x.

Untuk mencari luas sektor ⊙ AOB

$$\frac{\text{Luas sektor ⊙ AOB}}{\text{Luas seluruh lingkaran}} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\frac{\text{Luas sektor ⊙ AOB}}{\pi r^2} = \frac{x}{2\pi}$$

Sehingga luas sektor ⊙ AOB = $\frac{x}{2\pi}.\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2x$

Dari bangun di atas diperoleh :

Luas Δ AOB < luas juring AOB < luas Δ AOD

½ . OA . BC < ½ r^2x < ½ . OA . AD

½ . r . r sin x < ½ r^2x < ½ . r . r tan x

½ r^2 sin x < ½ r^2x < ½ r^2 tan x

sin x < x < tan x ………………….. (i)

Dari (i) diperoleh :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} 1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{1} = 1$$

Jadi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Dari sini dapat dikembangkan :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Dan untuk $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x.\cos x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}. \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1.1 = 1$$

Demikian juga dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Kesimpulan :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$	4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

Contoh

Hitunglah :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

Penyelesaian :

a. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

b. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right).\frac{3}{5}$$

$$= 1.\frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan 3x}{3x}\right)\left(\dfrac{5x}{\sin 5x}\right) . \dfrac{3}{5}$

$= 1.1.\dfrac{3}{5}$

$= \dfrac{3}{5}$.

D. Limit Fungsi Eksponensial

a. Bilangan e

$$\lim_{n \to \sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to \sim} \left(1+\frac{n}{1}.\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-1)}{3!}.\frac{1}{n^3}+ ... +\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \sim} \left(1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{3}{n}\right)+ ... +\frac{1}{n^n}\right)$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+ ...$$

Jika diambil sampai sepuluh tempat desimal diperoleh

$$\lim_{n \to \sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182884$$

Nilai limit ini disebut bilangan e atau bilangan Euler (diambil nama sang penemu yaitu Leonard Euler matematikawan Austria 1707 – 1783).

Sehingga :

$$\lim_{n \to \sim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Limit ini dapat dikembangkan untuk setiap $x \in R$ dipenuhi

$$\boxed{\lim_{x \to \sim} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Jika disubstitusikan $u = \frac{1}{x}$ maka diperoleh rumus

$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$

Contoh tentukan $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$

Jawab : $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+3} = \lim\limits_{x \to \sim} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x} . \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3}$

$$= \lim_{x \to \sim} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}.2} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$$

$$= \lim_{x \to \sim} \left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2} . \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3}$$

$= e^2 . (1 + 0)^3$

$= e^2$.

Logaritma yang mengambil e sebagai bilangan pokok disebut logaritma naturalis atau logaritma Napier, dan ditulis dengan notasi "ln", sehingga ln x = ${}^{e}\log x$.

Dari $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, maka ${}^{a}\log \left(\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = {}^{a}\log e$

$$\lim_{x \to 0} {}^{a}\log (1+x)^{\frac{1}{x}} = {}^{a}\log e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{{}^{a}\log (1+x)}{x} = \frac{\ln e}{\ln a}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{{}^{a}\log (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \qquad \text{……….. (i)}$$

Misalkan ${}^{a}\log (1 + x) = y$

$1 + x = a^y \rightarrow x = a^y - 1$

Untuk $x \rightarrow 0$, maka $a^y \rightarrow 1$ yang berarti $y \rightarrow 0$, sehingga persamaan (i)

$$\lim_{x \to 0} \frac{y}{a^y - 1} = \frac{1}{\ln a}$$

Sehingga : $\lim\limits_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \ln a$

Atau secara umum : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$

Jika disubstitusikan a dengan e

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e$ atau $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

Contoh : Tentukan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

Jawab : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1 - e^{bx} + 1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{a^{ax} - 1}{x} - \frac{e^{bx} - 1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \,.\, a - \frac{e^{bx} - 1}{bx} \,.\, b \right)$$

$$= 1 \,.\, a - 1 \,.\, b$$

$$= a - b$$

Latihan 1

Tentukan nilai limitnya

1. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 7x + 4)$
2. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{2}{x} + x \right)$
3. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x - 3}$
4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$
5. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^5 - 1}{x^2 + x + 1}$
6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$
7. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$
8. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x + 10}{x + 2}$
9. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$
10. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - 5}$
11. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2x}}{x - 2}$
12.
13.
14. $\lim\limits_{x \to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ $\quad (\text{misal} : \sqrt[3]{x} = y^2)$
15. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x}$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - x}}$
18. $\lim\limits_{x \to \sim} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 2})$
19. $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
20. $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$
21. $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{(1 + 2 + 3 + \ldots + n)}{n^2}$
22. $\lim\limits_{x \to \sim} \frac{(1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1))}{n^2 + 2}$
23. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right)$
24. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^2} + \ldots + \frac{3n - 2}{n^2} \right)$

12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2} - \sqrt{3x-5}}{x-3}$

13. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1}}{2x-3-\sqrt{x}}$

25. Hitung $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ Petunjuk : kuadratkan

26. Tentukan limit U_n dari barisan

0,3 ; 0,33 ; 0,333 ; 0,3333

27. Tentukan limit U_n dari barisan
0,2 , 0,23 , 0,233 , 02333 , …

28. Tentukan limit suku U_n dari barisan
$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \ldots$

29. Tentukan limit suku U_n dari barisan
$\sqrt{6},\ \sqrt{6\sqrt{6}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}},\ \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}},\ \ldots$

30. Tentukan limit U_n dari barisan berikut
$\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \ldots, \dfrac{2n}{2n-1}, \ldots$

31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$

33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

34. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

35. $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x$

36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

38. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos x - \sin x}{\cos x - 1 + \sin x}$

39. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\tan \pi x}{x+2}$

40. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\tan x}$

41. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$

47. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 2^x}{3x}$

48. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{3x}}{x}$

49. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{2x} - b^{3x}}{x}$

50. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$

42. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1 + \dfrac{7}{x}\right)^{x}$

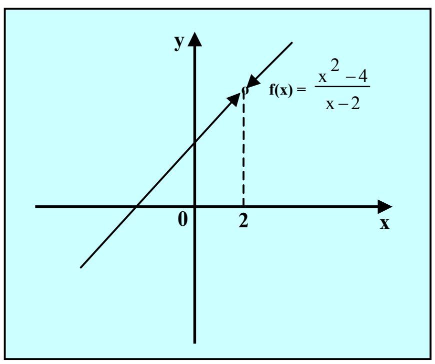
43. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^{x}$

44. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x}$

45. $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{x}$

E. Kontiunitas



Gb.1.4

Perhatikan fungsi pada bilangan real f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ seperti pada grafik di samping.

Untuk x = 2 diperoleh f(2) = $\dfrac{0}{0}$ (tak tentu) sehingga grafiknya terputus di x = 2 dalam hal ini dikatakan f(x) diskontinu di x = 2.

Sedangkan untuk interval $\{x|x < 2, x \in R\}$ dan interval $\{x|x > 2, x \in R\}$ grafiknya berkesinambungan, dalam hal ini dikatakan f(x) kontinu di $x \neq 2$.

Secara formal suatu fungsi dikatakan kontinu di x = c, jika dipenuhi :

a. $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada

b. f(c) ada

c. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika pada suatu fungsi f(x) diskontinu di x = c, maka dapat dibuat sedemikian hingga $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, maka dikatakan diskontuinitas di x = c ini dapat dihapuskan.

Contoh :

Tentukan diskontuinitas fungsi pada bilangan real f(x) = $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

Jawab : fungsi rasional di atas akan diskontinu jika penyebutnya nol atau

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ atau } x = 2$$

Sehingga f(x) diskontinu di x = -2 atau x = 2.

Selanjutnya untuk $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$= \dfrac{12}{4} = 3$

Diskontinu di x = 2 dapat dihapuskan dengan menetapkan definisi f(2) = 3.
Selanjutnya untuk x = -2 diperoleh

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

$= \dfrac{\to 4}{\to 0} = \infty$, sedangkan f(-2) = $\dfrac{(-2)^3-8}{(-2)^2-4} = \dfrac{-16}{0}$ tidak terdefinisi.

Sehingga diskontinu di x = -2 tidak dapat dihapuskan.

Latihan 2

Selidiki kontinuitas fungsi-fungsi berikut

1. $f(x) = x^2 + x$ di $x = -1$
2. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ di $x = 2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ di $x = -1$
4. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$ di $x = 2$
5. $f(x) = \dfrac{6t-9}{t-3}$ di $t = 3$
6. $f(x) = \begin{cases} -3x+4 & \text{untuk } x \le 2 \\ -2 & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$ di x = 2
7. Di titik mana saja $f(x) = \dfrac{5x+4}{x^2-3x-10}$ diskontinu dan selidiki macam diskontinuitasnya.
8. Di titik mana saja $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ diskontinu dan selidiki macam diskontinuitasnya.
9. Dengan grafik di titik mana saja (jika ada) fungsi ini diskontinu

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{untuk } x < 0 \\ x^2 & \text{untuk } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

10. Tentukan a dan b agar fungsi :

    $$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{untuk } x < -2 \\ a & \text{untuk } x = 2 \\ bx+1 & \text{untuk } x > -2 \end{cases} \quad \text{kontinu di } x = 2$$