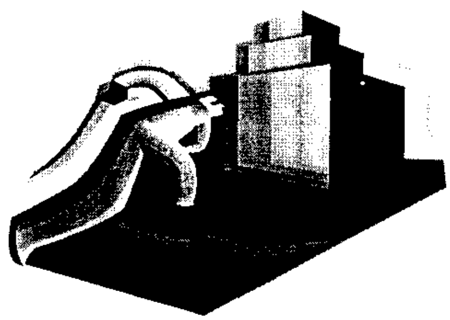
PELATIHAN INSTRUKTUR/PENGEMBANG MATEMATIKA SMP JENJANG DASAR

Tanggal 10 S.D 23 Oktober 2004

GEOMETRI RUANG



Disampaikan oleh :
Drs. Setiawan,M.Pd

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

DAFTAR ISI

BAGIAN I
PENURUNAN RUMUS-RUMUS VOLUM SECARA INDUKTIF

A. PENGERTIAN BERPIKIR INDUKTIF

Berpikir induktif dalam matematika diartikan sebagai berpikir dari unsur-unsur atau pola-pola menuju ke suatu generalisasi (kesimpulan yang bersifat umum). Kebenaran suatu pernyataan matematika secara induktif diturunkan berdasarkan hasil eksperimen dan pengamatan pola setelah diadakan abstraksi dan idealisasi (Wirasto, 1982). Abstraksi adalah anggapan di alam pikiran bahwa obyeknya ada, sedangkan idealisasi adalah anggapan bahwa obyeknya ideal (sempurna dalam segala hal).

B. VOLUM BANGUN RUANG

1. Konsep/definisi

Isi (volum) suatu bejana (bangun ruang berongga) ialah banyaknya takaran yang dapat digunakan untuk memenuhi bejana itu.

Perlu diketahui bahwa yang dimaksud dengan bejana ialah bangun ruang berongga dengan ruangan dalam rongganya dapat diisi dengan zat cair, beras, pasir dan sebagainya. Karena bejana merupakan bangun ruang yang memiliki keteraturan maka bentuk bejana dapat berupa:

- toples
- termos
- tangki
- bak mandi
- tandon air
- kolam renang, dan sebagainya

Sedangkan satuan volum/satuan penakarnya berupa bejana lain yang biasanya memiliki ukuran yang lebih kecil. Satuan penakar dapat berupa:

- cangkir
- gelas
- tabung takaran bensin 1 literan, $\frac{1}{2}$ literan, 2 literan dan seterusnya
- kubus-kubus satuan, dan lain-lain.

Contoh 1

Apabila sebuah toples

a) dapat dipenuhi dengan air sebanyak 15 cangkir kurang sedikit maka dikatakan (setelah dibulatkan) bahwa:

Volum toples = 15 cangkir

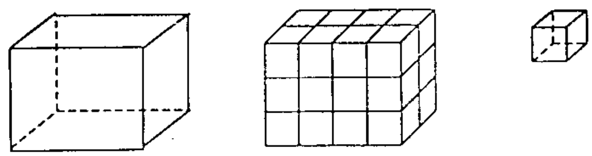
b) dapat dipenuhi dengan air sebanyak 8 gelas lebih sedikit maka dikatakan (setelah dibulatkan) bahwa:

Volum toples = 8 gelas

Contoh 1 ini memberikan penanaman konsep kepada anak akan arti volum sebagai banyaknya satuan penakar yang dapat digunakan untuk mengisi bejana hingga penuh.

Contoh 2

(A) (B) (C)

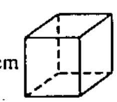


Gambar (A) : Keadaan balok transparan kosong

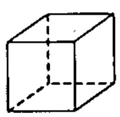
Gambar (B) : Keadaan balok transparan setelah diisi/ditakar dengan kubus-kubus satuan (satuan takaran berupa kubus)

Gambar (C) : Satuan takaran (berupa kubus) yang digunakan.

Dengan mengisikan kubus-kubus satuan ke dalam balok transparan pada gambar (A) satu demi satu (diperagakan di hadapan siswa) hingga penuh (gambar B) dan melakukan penghitungan satu, dua, tiga, ... dan seterusnya, ternyata hitungan terakhirnya 24. Ini berarti isi balok (gambar B) adalah 24 satuan kubus. Guru dapat mempertegas dengan menulis di papan tulis bahwa:



$$\left.\begin{array}{l} \text{panjang} = 1 \text{ dm} \\ \text{lebar} = 1 \text{ dm} \\ \text{tinggi} = 1 \text{ dm} \end{array}\right\} \text{1 satuan kubus} = 1 \text{ cm kubik} = 1 \text{ cm}^3$$



$$\left.\begin{array}{l} p = 1 \text{ dm} \\ \ell = 1 \text{ dm} \\ t = 1 \text{ dm} \end{array}\right\} \text{1 satuan kubus} = 1 \text{ dm kubik} = 1 \text{ dm}^3$$

Untuk selanjutnya disepakati bahwa:

Besaran: 1 (satu) liter ialah satuan ukuran volum yang setara dengan kubus satuan berukuran panjang, lebar, dan tinggi masing-masing 1 (satu) desimeter.

Sejalan dengan kedua contoh satuan kubus di atas anak kemudian diajak menyimpulkan bahwa satu meter kubik adalah satuan volum berbentuk kubus dengan ukuran:

panjang = 1 meter

lebar = 1 meter dan
tinggi = 1 meter

Untuk selanjutnya sebagai pengetahuan tentang satuan volum tak baku adalah sebagai berikut:

a) <u>Satuan volum tak baku:</u>
   Berupa cangkir, gelas, mangkuk, ember dan lain-lain, yaitu satuan alat takar yang belum diketahui ukurannya berdasarkan satuan ukuran baku.
b) <u>Satuan volum baku:</u>
   Berupa alat penakar yang sudah diketahui ukuran volumnya misalkan:
   - takaran bensin (bentuk tabung) satu literan, dua literan, empat literan dan ada lagi $\frac{1}{5}$ literan, $\frac{1}{4}$ literan, $\frac{1}{2}$ literan dan lain-lain.
   - Gelas-gelas ukur yang di dalamnya terdapat skala-skala ketinggian yang menyatakan volum.
   - Meteran (angka bergerak) pada pompa bensin dan sejenisnya, Meteran ukur volum seperti ini hanya berlaku untuk zat cair (air, minyak, alkohol, tiner dsb.) karenagerakan angkanya berdasarkan atas kecepatan (debit) dari zat cair yang dialirkan.

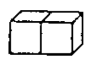
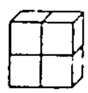
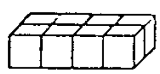
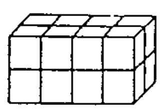
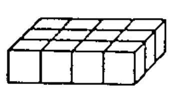
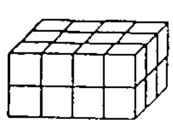
<u>Keterangan:</u>
Debit zat cair ialah volum zat cair yang dapat dialirkan melalui selang (pipa) per satuan waktu (detik, per menit, per jam dan sebagainya).

2. Penurunan Rumus-rumus Volum Bangun Ruang

Dalam hal memberikan penalaran memperoleh rumus-rumus volum bangun ruang untuk pertama kalinya kepada para siswa dapat diberikan LK penemuan rumus volum balok seperti berikut.

LK Volum Balok (10 menit)

Isikan jawaban Anda pada titik-titik di bawah ini.

NO	Gambar bangun	Volum (V)	Panjang (p)	Lebar (l)	Tinggi (t)	$p \times l \times t$
1		2	2	1	1	2
2		4	2	1	2	4
3		....	......	....	....	....
4		....	......	....	....	....
5		....	......	....	....	....
6		....	....	....	....	....

Perintah:

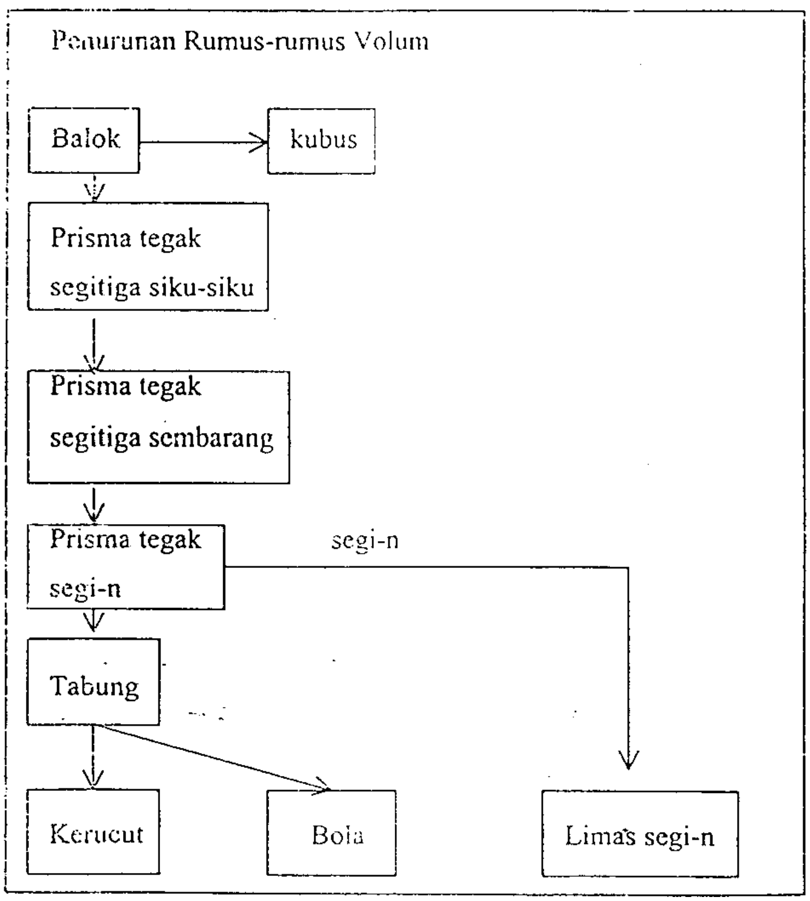
Amatilah isian pada kolom V dan pada kolom $p \times \ell \times t$. Apakah bilangan-bilangannya salalu sama ? Bila ya, kemudian tulislah hubungan antara volum V, panjang p, lebar l, dan tinggi t pada balok secara umum.

Kesimpulan:

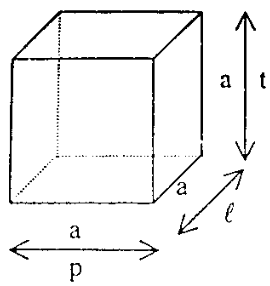
Hubungan yang dimaksud adalah: V = ... × ..... × .....

Jawaban yang di harapkan adalah $V_{balok} = p \times \ell \times t$

Dengan basis volum balok $V = p \times \ell \times t$ tersebut di SD secara induktif maupun deduktif dapat diturunkan rumus-rumus volum untuk bangun-bangun ruang lainnya seperti kubus, prisma, tabung, kerucut, bola, limas. Skemanya adalah seperti berikut.



a. Volum Kubus



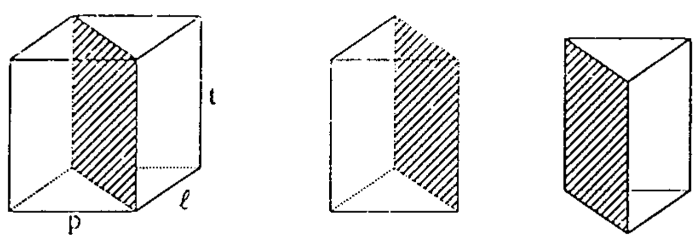
Kubus adalah keadaan khusus dari balok yakni balok dengan ukuran panjang, lebar, dan tinggi-nya sama.

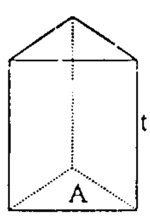
$V_{kubus} = p \times \ell \times t$

$= a \times a \times a = a^3$

> Jadi
>
> $V_{kubus} = a \times a \times a = a^3$
>
> dengan a = panjang rusuk kubus

b. Volum Prisma Tegak Segitiga Siku-siku





Prisma tegak segitiga siku-siku diperoleh dari membe-lah balok menjadi 2 bagian yang sama melalui salah satu bidang diagonal ruangnya (lihat gambar peragaan di atas). Oleh sebab itu:

$$V_{\text{prisma tegak segitiga siku-siku}} = \frac{1}{2} \text{ volum balok}$$

$$= \frac{1}{2} \times p \times \ell \times t$$

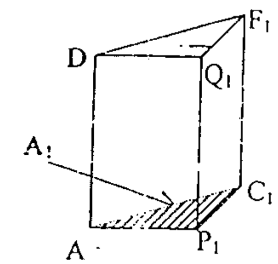
$$= (\frac{1}{2} \times p \times \ell) \times t$$

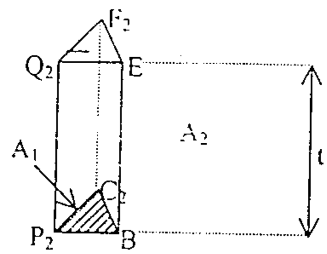
$$= A \times t$$

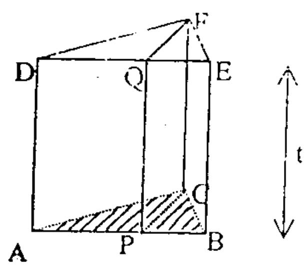
A = luas alas yang berupa segitiga siku-siku

t = tinggi prisma

c. Volum Prisma Tegak Segitiga Sembarang







Prisma tegak segitiga sembarang diperoleh dari merangkai 2 prisma tegak segitiga siku-siku $AP_1C_1.DQ_1F_1$ dengan $P_2BC_2.Q_2EF_2$. Hasilnya akan berupa prisma tegak segitiga sembarang ABC.DEF.

Jika A_1 dan A_2 berturut-turut adalah luas alas prisma tegak pertama dan kedua, sedangkan tinggi kedua prisma sama, maka volum prisma tegak segitiga sembarang yang dibentuknya yaitu ABC.DEF adalah

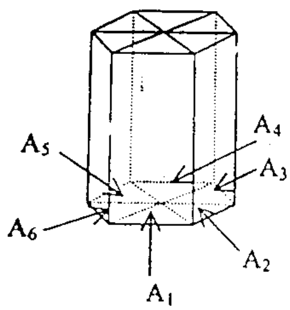
$$V = V_1 + V_2$$

$$= A_1 t + A_2 t = (A_1 + A_2) \times t = A \times t.$$

Jadi

> $V_{\text{prisma tegak segitiga sembarang}} = A \times t$;
>
> A = luas alas prisma
>
> t = tinggi prisma

d. Volum Prisma Tegak Segi n



Prisma tegak segi enam dapat disusun (dirangkai) dari 6 prisma tegak segitiga sembarang (lihat gambar). Jika $A_1, A_2, \ldots, A_6$ berturut-turut menyatakan luas alas dari masing-masing prisma tegak segitiga yang dimaksud, sedangkan tinggi masing-masing prisma itu sama yakni t, maka volum prisma tegak segienam tersebut adalah:

$$V = A_1t + A_2t + \ldots + A_6t$$
$$= (A_1 + A_2 + \ldots + A_6) \times t$$
$$= A \times t$$

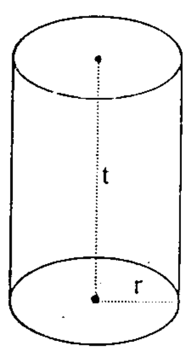
Dengan penalaran yang sama akan diperoleh:

$$V_{\text{prisma tegak segi-n}} = A_1t + A_2t + \ldots + A_nT$$
$$= (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \times t$$
$$= A \times t$$

Jadi

$V_{\text{prisma tegak segi-n}} = A \times t$; A = luas alas prisma t = tinggi prisma

e. Volum Tabung



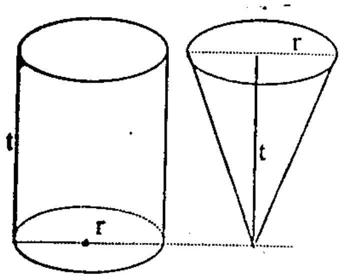
Tabung dapat dipandang sebagai prisma tegak segi n beraturan dengan n tak terhingga. Oleh sebab itu maka:

$$V_{\text{tabung}} = V_{\text{prisma tegak segi-n}}$$
$$= A \times t$$
$$= \pi r^2 \times t$$

Jadi

$V_{\text{tabung}} = \pi r^2 \times t$; $\pi = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$ r = jari-jari tabung t = tinggi tabung

f. Volum Kerucut



Untuk mencari rumus volum kerucut di tingkat SD dan SLTP dilakukan melalui peragaan dengan menakar menggunakan alat takar berupa kerucut dan tabung pasangannya. Yang dimaksud dengan tabung pasangannya ialah tabung yang luas alasnya sama dengan luas alas kerucut dan tingginya sama dengan tinggi kerucut. Sedangkan bahan yang digunakan dalam melakukan penakaran dapat berupa beras, jagung, atau otek (sejenis gendum). Dari hasil penakaran ternyata isi tabung sama dengan 3 kali menakar dengan kerucut.

Sehingga

$V_{tabung} = 3 \times V_{kerucut}$, atau

$V_{kerucut} = \frac{1}{3} \times V_{tabung}$

$= \frac{1}{3} \pi r^2 t.$

Jadi

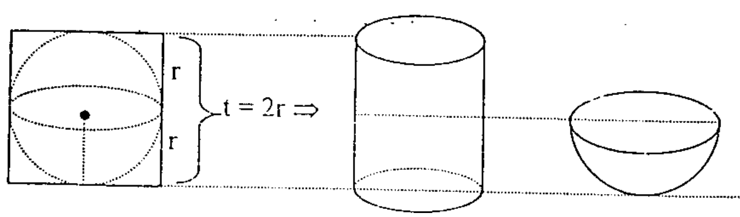
$V_{kerucut} = \frac{1}{3} \pi r^2 t.$

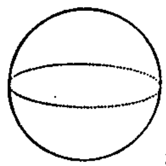
$= \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times t$; $\pi = \frac{22}{7} \approx 3,14$

r = jari-jari lingkaran alas kerucut

t = tinggi kerucut

g. Volum Bola dan Luas Permukaan Bola





Untuk mencari rumus volum bola di tingkat SD dan SLTP dilakukan melalui peragaan dengan menakar menggunakan alat takar setengah bola untuk ditakarkan ke tabung pasangannya.

Yang dimaksud dengan tabung pasangannya ialah tabung yang dapat melingkupi bola secara utuh (menyinggung bola di bagian atas, bagian bawah, dan bagian samping. Lihat gambar peraganya)

Dengan demikian jika jari-jari bolanya r maka jari-jari dan tinggi tabung pasangannya berturut-turut adalah r dan 2r.

Dari hasil peragaan ternyata isi tabung sama dengan tiga takar setengah bola yaitu.

$V_{tabung} = 3 \times V_{\frac{1}{2}\,bola}$ atau

$$V_{\frac{1}{2}bola} = \frac{1}{3} \times V_{tabung}$$

$$V_{\frac{1}{2}bola} = \frac{1}{3} \times \pi\, r^2 \times t$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi\, r^2 \times 2r$$

$$= \frac{2}{3} \pi\, r^3$$

Karena

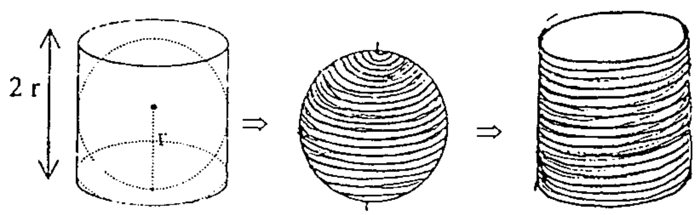
$$\text{maka: } \frac{V_{\frac{1}{2}bola} = \frac{2}{3}\pi\, r^2}{V_{bola} = \frac{4}{3}\pi r^3} \times 2$$

Jadi

$$V_{bola} = \frac{4}{3} \times \pi r^3 \; ; \; \pi = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$$

r = jari-jari bola

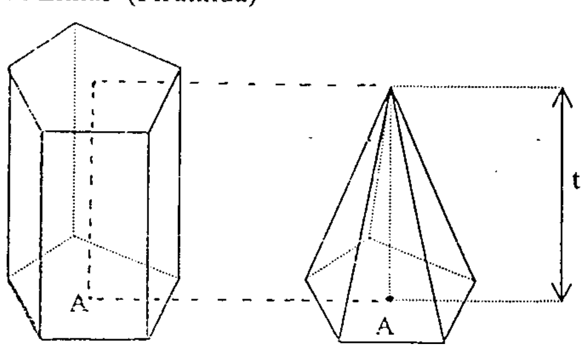
Lebih lanjut untuk untuk menunjukkan bahwa L = 4 πr^2 adalah rumus luas permukaan dari sebuah bola yang berjari-jari r dilakukan seperti berikut. Lilitkan sumbu kompor sepanjang permukaan bola. Tandailah titik awal dan titik akhir dari sumbu kompor yang dililitkan itu. Lepaskan kemudian lilitan sepanjang permukaan bola itu untuk dililitkan sepanjang selimut tabung pasangannya.



Hasil praktik menunjukkan bahwa panjang tali yang dililitkan sama. Ini berarti bahwa luas permukaan bola sama dengan luas permukaan selimut tabung, atau

$$\begin{aligned} L_{bola} &= L_{selimut\ tabung} \\ &= 2\ \pi r\ .\ t \\ &= 2\pi r\ .\ 2r \\ &= 4\ \pi r^2 \end{aligned}$$

h. Volum Limas (Piramida)



Untuk mencari rumus volum limas di tingkat SD dan SLTP dilakukan melalui peragaan menakar menggunakan sebuah limas (sembarang limas) dan sebuah prisma pasangannya. Yang dimaksud prisma pasangannya adalah prisma yang alasnya sama dengan alas limas dan tingginya sama dengan tinggi limas. Dari hasil peragaan tenyata isi prisma sama dengan tiga kali isi limas, yaitu

$V_{prisma} = 3 \times V_{limas}$, atau

$$V_{limas} = \frac{1}{3} \times V_{prisma}$$

$$= \frac{1}{3} \times A \times t$$

Jadi

$$\boxed{V_{limas} = \frac{1}{3} \times A \times t \; ; \quad A = \text{luas alas limas}, \quad t = \text{tinggi limas}}$$

BAGIAN II

BEBERAPA BUKTI SECARA DEDUKTIF

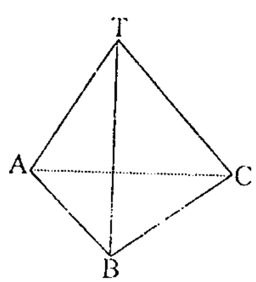
(BAHAN PENGAYAAN UNTUK GURU PENGGEMAR MATEMATIKA)

A. PENGERTIAN BERPIKIR DEDUKTIF

Berpikir deduktif dalam matematika diartikan sebagai berpikir berdasarkan aturan-aturan yang berlaku dalam matematika. Aturan-aturan yang dimaksud adalah bahwa suatu dalil (teorema) harus dibuktikan kebenarannya berdasarkan definisi yang berlaku atau berdasarkan aksioma (postulat) yang berlaku atau berdasarkan teorema-teorema terdahulu yang sudah dibuktikan kebenarannya. Yang dimaksud definisi adalah suatu batasan/kesepakatan yang harus diterima dan ditaati. Postulat atau aksioma adalah suatu kebenaran matematika yang diterima tanpa bukti.

Contoh Definisi:

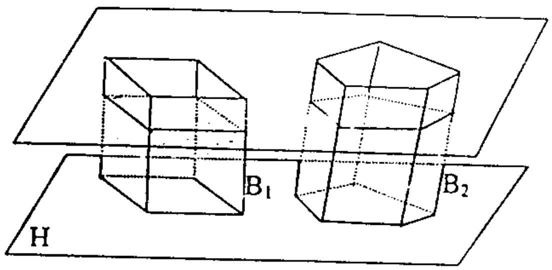
Limas segitiga ialah bangun ruang yang dibatasi oleh empat-bidang sisi yang berbentuk daerah segitiga.



TABC adalah limas segitiga sebab sesuai dengan definisinya bangun ruang itu dibatasi oleh 4 sisi berupa daerah-daerah segitiga.

Contoh Postulat (Aksioma)

Postulat Cavalieri (Penghormatan untuk matematikawan Italia bernama Bonaventura Cavalieri yang hidup tahun 1598 sampai dengan 1647) bunyinya adalah sebagai berikut:

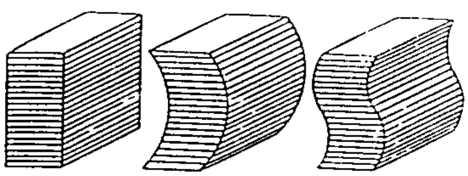


Misalkan B_1 dan B_2 masing-masing adalah bangun ruang, sedangkan H adalah suatu bidang.

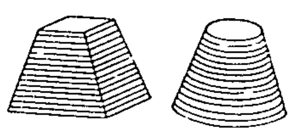
Jika setiap bidang yang sejajar bidang H memotong B_1 dan B_2 atas 2 daerah yang sama luasnya, maka:

Volum B_1 = Volum B_2.

Untuk mempermudah pemahaman dari postulat tersebut, illustrasinya diberikan seperti berikut:



(a) (b) (c)



(d) (e)

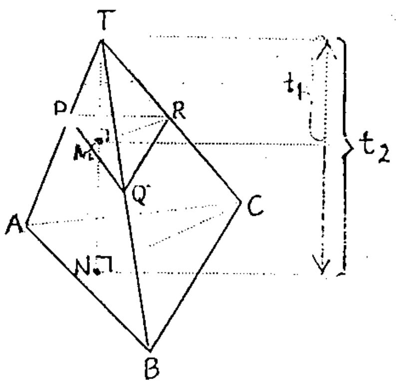
Balok pada gambar (a) diiris-iris menjadi sayatan-sayatan tipis. Bangun pada gambar (b) dan (c) masing-masing merupakan bentukan dari balok pada gambar (a). Karena tidak ada unsur yang hilang maka meskipun bentuknya berubah-ubah tetapi volumnya tetap.

Sejalan dengan itu, misalkan kedua bangun ruang yang digambarkan pada gambar (d) dan (e) dapat diiris-iris ke dalam sayatan-sayatan tipis sedemikian sehingga bagian atas dari masing-masing sayatan yang bersesuaian adalah sama luasnya. Secara intuisi (kata hati) kita dapat menyatakan bahwa volum kedua bangun ruang (d) dan (e) adalah sama.

B. BEBERAPA PEMBUKTIAN SECARA DEDUKTIF

Beberapa pembuktian secara deduktif yang dikemukakan pada paket ini diarahkan untuk membuktikan secara deduktif rumus luas selimut dan volum untuk kerucut dan kerucut terpancung. Uraian selengkapnya adalah sebagai berikut:

Teorema 1



Jika bidang irisan PQR sejajar dengan bidang alas ABC, sedangkan jarak titik puncak ke bidang irisan dan ke bidang alas masing-masing adalah t_1 dan t_2, maka luas bidang irisan dibandingkan dengan luas bidang ialah :

$$\boxed{\frac{L_{\Delta PQR}}{L_{\Delta ABC}} = \frac{t_1^2}{t_2^2}}$$

Bukti:

Karena bidang irisan sejajar bidang alas akibatnya:

$\overline{PQ} // \overline{AB}$ $\overline{PR} // \overline{AC}$, dan $\overline{QR} // \overline{BC}$ .... (1)

Akibat (1) tersebut adalah:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta TPQ \sim \Delta TAB \Rightarrow \dfrac{TP}{TA} = \dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{TQ}{TB} \\ \Delta TPR \sim \Delta TAC \Rightarrow \dfrac{TP}{TA} = \dfrac{PR}{AC} = \dfrac{TR}{TC} \end{array}\right\} \frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{TR}{TC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Jika TM *dan* TN masing-masing menyatakan tinggi limas bagian atas dan tinggi limas seluruhnya, akibat dari bidang PQR//bidang ABC maka $\overline{MR} // \overline{NC}$, akibat berikutnya $\Delta TMR \sim \Delta TNC$.

Karena $\Delta TPQ \sim \Delta TNC \Rightarrow \dfrac{TR}{TC} = \dfrac{TM}{TN} = \dfrac{t_1}{t_2}$ .... (3)

Jika nilai perbandingan itu adalah λ, substitusi (2) dan (3) menghasilkan

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{TR}{TC} = \frac{t_1}{t_2} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Selanjutnya karena ΔPQR sebangun dengan ΔABC maka $\angle QPR = \angle BAC = \theta$ dengan θ tertentu. Selanjutnya

$$\frac{L_{\Delta PQR}}{L_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{1}{2} PQ \cdot PR \sin\theta}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\theta} = \frac{PQ \cdot PR}{AB \cdot AC} = \frac{PQ}{AB} \cdot \frac{PR}{AC} = \lambda^2$$

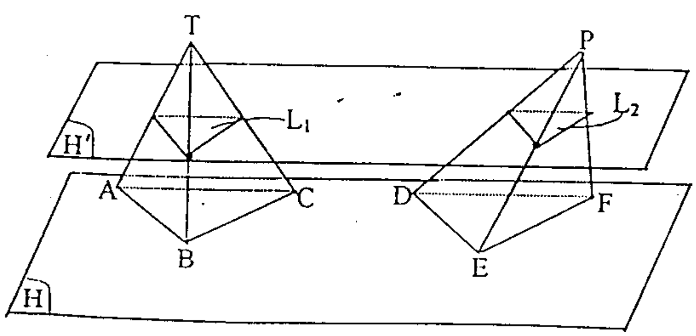
$$= \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Teorema 2

Jika 2 buah limas segitiga mempunyai luas alas dan tinggi yang sama, maka volum kedua limas itu sama.

Bukti:

Jika kedua alas limas terletak di bidang H (lihat gambar) sedangkan bidang H' adalah bidang yang sejajar bidang H dan memotong kedua limas (limas T.ABC dan limas P.DEF), maka garis-garis potong bidang irisannya yang bersesuaian tentu akan sejajar. Jika kedua limas yang dimaksud adalah T.ABC dan P.DEF dengan $L_{\Delta ABC} = L_{\Delta DEF} = L$, dan tinggi limas sama, maka:

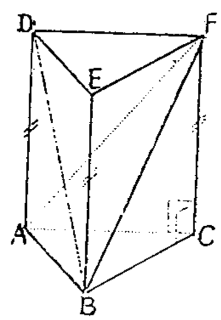


Menurut Teorema 1, $\frac{L_1}{L_{\Delta ABC}} = \frac{L_2}{L_{\Delta DEF}} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$ atau $\frac{L_1}{L} = \frac{L_2}{L}$ atau $L_1 = L_2$.

Karena $L_1 = L_2$ dan $H' // H$, menurut postulat Cavalieri maka:

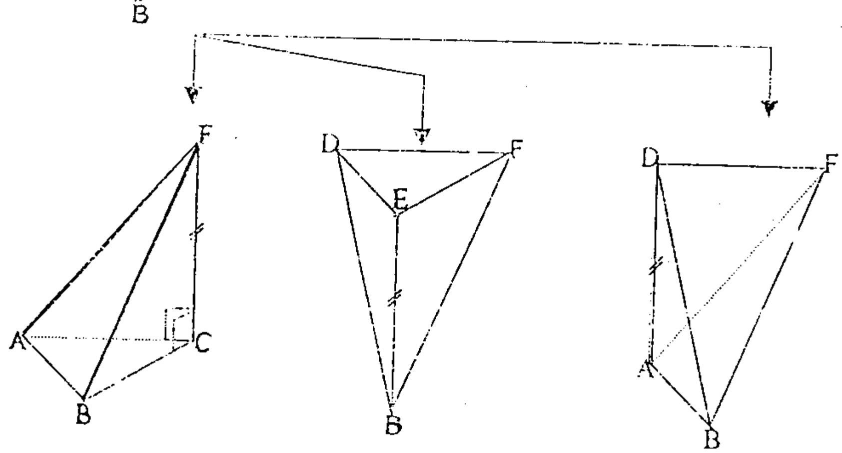
$$\boxed{\textbf{Volum T.ABC = Volum P.DEF}}$$

Teorema 3



Volum Limas segitiga adalah:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \times A \times t \; ; \; A = \text{luas alas limas} \quad t = \text{tinggi limas}}$$



Bukti:

Ambillah sebuah prisma tegak ABC.DEF.

Irislah prisma itu ke dalam 3 bagian yang masing-masing bagiannya berupa limas (lihat gambar)

(1) Limas F.ABC dan limas B.DEF mempunyai luas alas dan tinggi yang sama, sehingga menurut teorema 1 maka volum kedua limas itu sama.

Luas alas yang sama tersebut adalah $L_{\Delta ABC} = L_{\Delta DEF}$.

Tinggi yang sama adalah $CF = BE$.

(2) Limas F.BDE dan limas F.ABD luas alasnya sama yaitu

$L_{\Delta BDE} = L_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} L_{\text{persegipanjang ABED}}$.

Tinggi masing-masing limas adalah jarak titik F ke bidang ABED. Karena ΔBDE dan ΔABD masing-masing adalah bagian dari bidang ABED maka jarak titik puncak F ke bidang BDE = jarak titik F ke bidang ABD = jarak titik F ke bidang ABED.

Karena limas F.BDE dan limas F.ABD mempunyai luas alas dan tinggi yang sama maka menurut teorema 1. kedua limas mempunyai volum yang sama.

(3) Dari pernyataan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa ketiga limas mempunyai volum yang sama. Sehingga

$$V_{\text{limas segitiga}} = \frac{1}{3} V_{\text{prisma tegak segitiga}}$$

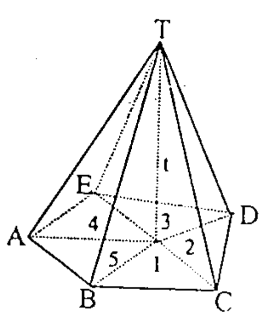
$$= \frac{1}{3} \times A \times t \;;\; A = \text{luas alas prisma}$$

$$= \text{luas alas limas}$$

$$t = \text{tinggi prisma}$$

$$= \text{tinggi limas}$$

Teorema 4



Volum sembarang limas adalah:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \times A \times t \;;\; A = \text{luas alas limas}, \quad t = \text{tinggi limas}}$$

Bukti:

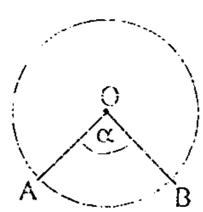
Ambil prisma segilima sebagai contoh. Perhatikan bahwa prisma segilima dapa dibagi menjadi 5 buah prisma segitiga yang masing-masing tingginya = t. Maka:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{limas segilima}} &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 \\
&= \frac{1}{3}A_1t + \frac{1}{3}A_2t + \ldots + \frac{1}{3}A_5t \\
&= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \ldots + A_5)t \\
&= \frac{1}{3}At
\end{aligned}
$$

Sejalan dengan itu maka:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{limas segi-n}} &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)t \\
&= \frac{1}{3}At
\end{aligned}
$$

Teorema 5

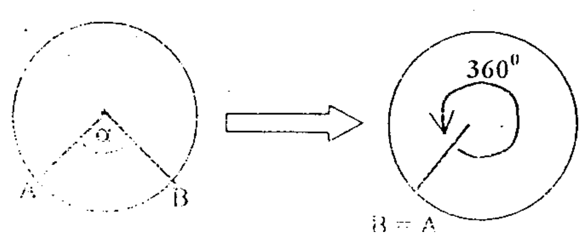


Pada lingkaran berlaku:

$$
\frac{\text{Luas juring OAB}}{\text{Luas lingkaran}} = \frac{\text{sudut juring OAB}}{\text{sudut satu lingkaran}} = \frac{\text{panjang busur AB}}{\text{panjang keliling lingkaran}}
$$

Bukti:

Bermula dari juring OAB, misalkan dipertahankan bahwa titik A tetap sedangkan titik B bergerak sepanjang lingkaran hingga suatu saat titik B tepat berimpit dengan titik A. Maka gambar yang dihasilkan adalah:



Sudut juring α menjadi sudut satu putaran = 360^0.

Busur $\widehat{AB}$ menjadi busur keliling lingkaran.

Luas juring OAB menjadi luas seluruh daerah lingkaran.

Dalam bentuk tabel adalah seperti berikut:

NO	OBYEK	
	Asal	Hasil
1	sudut α	sudut 360^0
2	busur AB	busur keliling lingkaran
3	luas juring OAB	luas lingkaran

Dengan mengambil sampel $\alpha = 90^0$ misalnya, akan dihasilkan:

(1) $\dfrac{\text{sudut } \alpha}{\text{sudut } 360^\circ} = \dfrac{90^\circ}{360^\circ} = \dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{\text{busur AB}}{\text{busur keliling lingkaran}} = \dfrac{\frac{1}{4}K}{K} = \dfrac{1}{4}$

(3) $\dfrac{\text{luas juring OAB}}{\text{luas lingkaran}} = \dfrac{\frac{1}{4}L}{L} = \dfrac{1}{4}$

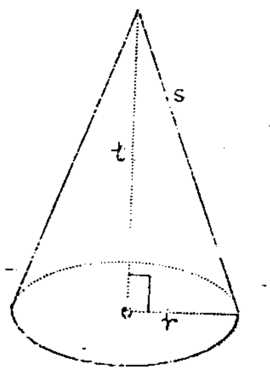
Selidikilah untuk nilai α yang lain. Hasil yang diperoleh ternyata nilai perbandingannya selalu menunjuk pada bilangan tertentu yang sama.

Karena masing-masing perbandingannya selalu menunjuk nilai yang sama (salah satu di antaranya dalam hal ini adalah $\frac{1}{4}$), maka secara umum dapat disimpulkan bahwa:

$$\frac{\text{luas juring OAB}}{\text{luas lingkaran}} = \frac{\text{sudut juring OAB}}{\text{sudut keliling lingkaran}}$$

$$= \frac{\text{panjang busur AB}}{\text{panjang keliling lingkaran}}$$

Teorema 6:



Untuk kerucut (yang dimaksud adalah kerucut lingkaran tegak) yang jari-jari lingkaran alasnya r, tingginya t, dan apotema (ruas garis pelukisnya) s, maka:

(a) $V_{kerucut}$ itu adalah:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 t}$$

(b) Luas selimut kerucut itu (tidak termasuk alasnya) adalah:

$$\boxed{L = \pi r s}$$

(c) Sudut juring bukaannya adalah:

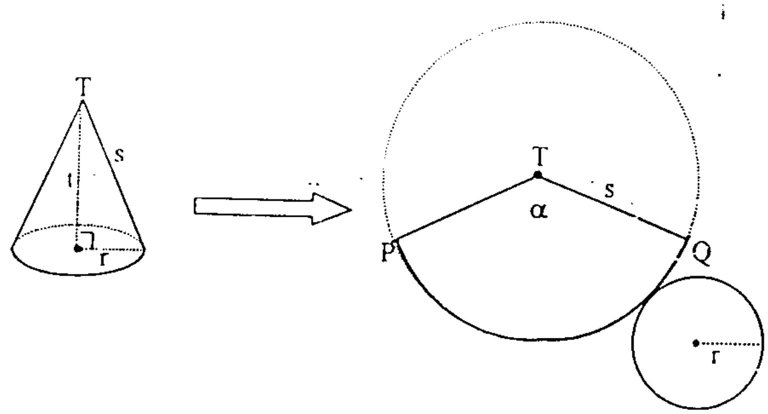
$$\boxed{\alpha = \frac{r}{s} \times 360^0}$$

Bukti:

(a) Karena kerucut dapat dipandang sebagai limas segi-n beraturan (dalam hal ini n bernilai tak terhingga), maka:

$$\begin{aligned} V_{kerucut} &= \text{volum limas beraturan segi n.} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times t = \frac{1}{3}\pi r^2 t \end{aligned}$$

(b) Luas selimut kerucut yang dimaksud adalah luas juring bukaannya (kerucut digunting sepanjang apotemanya kemudian dibuka. Hasilnya dapat dilukiskan melalui gambar berikut).



Berdasarkan teorema 4 maka:

$$\frac{\text{luas yang diarsir}}{\text{luas lingkaran besar}} = \frac{\text{panjang busur PQ (= keliling lingkaran alas kerucut)}}{\text{keliling lingkaran besar yang berjari - jari apotema}}$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s} \text{, maka}$$

$$\frac{\text{luas juring bukaan}}{\text{luas lingkaran besar}} = \frac{r}{s} \text{, atau}$$

$$\text{Luas juring bukaan} = \frac{r}{s} \times \text{luas lingkaran besar}$$

$$= \frac{r}{s} \times \pi s^2$$

$$= \pi rs$$

(c) Berdasarkan teorema 4 pula, maka:

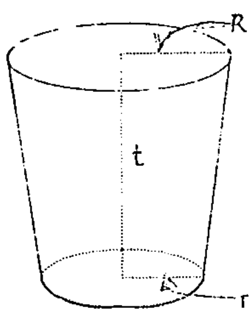
$$\frac{\text{sudut juring bukaan}}{\text{sudut satu putaran (lingkaran besar)}} = \frac{\text{panjang busur PQ}}{\text{panjang keliling lingkaran besar}}$$

$$= \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}\ \text{, sehingga:}$$

$$\text{Sudut juring bukaan} = \frac{r}{s} \times \text{sudut satu putaran}$$

$$\alpha = \frac{r}{s} \times 360^0$$

Teorema 7:



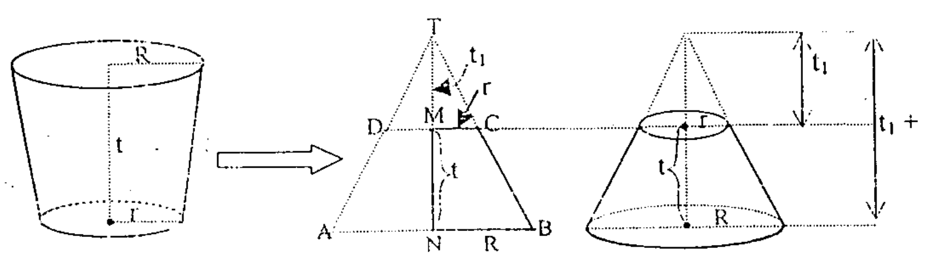
Ember

Volum kerucut terpancung yang jari-jari lingkaran atasnya r dan jari-jari lingkaran alasnya R serta tingginya t adalah:

$$V = \frac{1}{3}\pi t\,(R^2 + rR + r^2)$$

Bukti:

Kerucut terpancung (ember) secara matematis diperoleh dari kerucut lingkaran tegak yang dipancung (dipotong) bagian atasnya oleh sebuah bidang yang sejajar dengan bidang alas kerucut. Kerangka pemikirannya dapat dilihat dari gambar-gambar peragaan berikut:



Perhatikan lebih lanjut bahwa:

Δ TMC sebangun dengan Δ TNB. Akibatnya:

$$\frac{TM}{TN} = \frac{MC}{NB} \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_1 + t} = \frac{r}{R}$$

$$\Leftrightarrow Rt_1 = rt_1 + rt$$

$$\Leftrightarrow (R - r)\, t_1 = rt$$

$$\Leftrightarrow \qquad t_1 = \frac{rt}{(R - r)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{\text{V kerucut bagian atas}}{\text{V kerucut seluruhnya}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 t_1}{\frac{1}{3}\pi R^2 (t_1 + t)}$$

$$= \frac{r^2 t_1}{R^2 (t_1 + t)} = \frac{r^2\left(\frac{rt}{R - r}\right)}{R^2\left[\frac{rt}{(R - r)} + t\right]}$$

$$= \frac{\frac{r^3 t}{(R - r)}}{R^2\left[\frac{rt + (R - r)\,t}{(R - r)}\right]}$$

$$= \frac{r^3 t}{\cancel{(R - r)}} \cdot \frac{\cancel{(R - r)}}{R^2\left[\cancel{rt} + Rt - \cancel{rt}\right]}$$

$$= \frac{r^3 t}{R^3 t} = \frac{r^3}{R^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Akibat dari (2) maka:

$$\frac{\text{V kerucut bagian atas}}{\text{V kerucut bagian bawah}} = \frac{r^3}{R^3 - r^3}$$

$$\frac{\text{V kerucut bagian bawah}}{\text{V kerucut bagian atas}} = \frac{R^3 - r^3}{r^3}$$

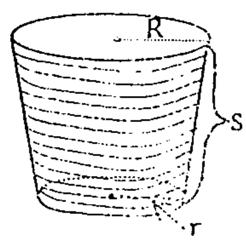
$$V_{\text{kerucut bagian bawah}} = \frac{\left(R^3 - r^3\right)}{r^3} \cdot V_{\text{kerucut bagian atas}}.$$

$$V \text{ kerucut terpancung} = \frac{(R^3 - r^3)}{r^3} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 t_1$$

$$= \frac{(R - r)(R^2 + rR + r^2)}{r^3} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{rt}{R - r}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi t\,(R^2 + rR + r^2)$$

Teorema 8:



Luas selimut kerucut terpancung dengan:

R = jari-jari lingkaran atas

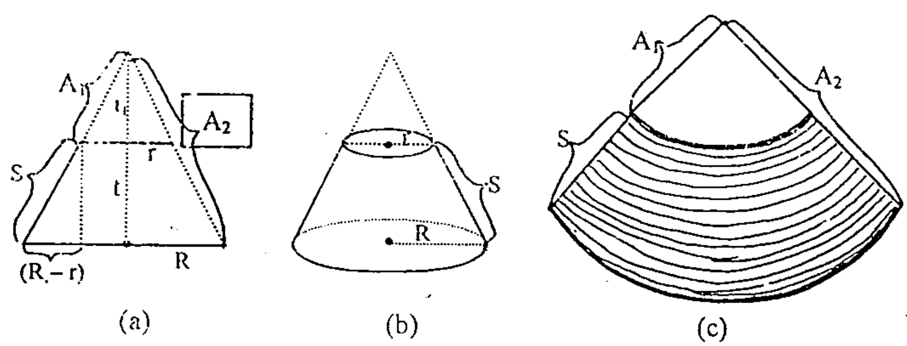
r = jari-jari lingkaran bawah

S = garis pelukis (apotema) dari kerucut terpancung

adalah:

$$\boxed{L = \pi (R + r)\, S}$$

Bukti:



(1) Mengadopsi dari bukti teorema 7 diperoleh:

$$t_1 = \frac{rt}{(R-r)}$$

(2) Luas yang diarsir $= L_{\text{juring besar}} - L_{\text{juring kecil}}$

$$= \pi R A_2 - \pi r A_1$$

$$= \pi [RA_2 - rA_1]$$

$$= \pi \left[R\sqrt{R^2 + (t_1 + t)^2} - r\sqrt{r^2 + t_1^{\,2}} \right]$$

$$= \pi \left[R\sqrt{R^2 + \left(\frac{rt}{R-r} + t\right)^2} - r\sqrt{r^2 + \left(\frac{rt}{R-r}\right)^2} \right]$$

$$= \pi \left[R\sqrt{R^2 + \left(\frac{rt + Rt - rt}{R-r}\right)^2} - r\sqrt{\frac{r^2(R-r)^2 + r^2t^2}{(R-r)^2}} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{R}{R-r}\sqrt{R^2(R-r)^2 + R^2t^2} - \frac{r}{R-r}\sqrt{r^2(R-r)^2 + r^2t^2} \right]$$

$$= \pi \left[\frac{R^2}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + t^2} - \frac{r^2}{R-r}\sqrt{(R-r)^2 + t^2} \right]$$

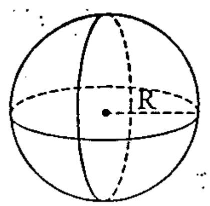
$$= \pi \left[\frac{R^2}{R-r} \cdot S - \frac{r^2}{R-r} \cdot S \right]$$

$$= \pi \left[\frac{R^2 - r^2}{R-r} \right] S$$

$$= \pi \left[\frac{(R+r)(R-r)}{(R-r)} \right] S$$

$$= \pi (R + r) S$$

Teorema 9



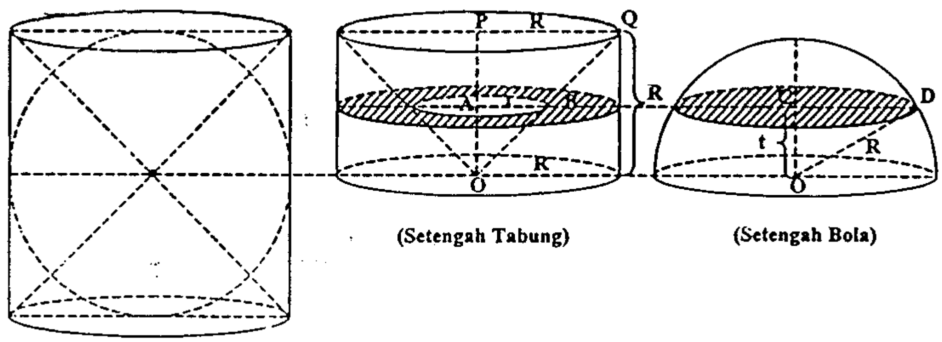
Apabila sebuah bola ukuran panjang jari-jarinya R, maka

a. Volum bola itu adalah $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

b. Luas permukaan (kulit) bola itu $\boxed{L = 4\pi R^2}$

Bukti a

Untuk membuktikan kita perhatikan bola berikut tabung pasangannya (tabung yang melingkupi bola), dan sepasang kerucut lingkaran tegak yang titik puncaknya di titik pusat bola dan lingkaran lingkaran alasnya pada tutup alas dan tutup atas tabung (lihat gambar)



(Setengah Tabung) (Setengah Bola)

Sekarang kita ambil sebagian dari bangun itu, yakni setengah tabung dan setengah bola. Suatu bidang yang berjarak t dari alas setengah bola (sekaligus sebagai alas setengah tabung) tentu akan memotong bangun ruang di dalam setengah tabung dan di luar kerucut dalam bentuk mirip cincin dan akan memotong bangun setengah bola dalam bentuk lingkaran (lihat bagian-bagian yang diarsir).

I. Untuk bangun setengah tabung

Δ OAB ∞ Δ OPQ, maka

$$\frac{\text{alas } \Delta \text{ OAB}}{\text{alas } \Delta \text{ OPQ}} = \frac{\text{tinggi } \Delta \text{ OAB}}{\text{tinggi } \Delta \text{ OPQ}}, \text{ yakni}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{t}{R} \Leftrightarrow r = t$$

$$\text{Luas cincin} = L_{\odot\text{besar}} - L_{\odot\text{kecil}}$$
$$= \pi R^2 - \pi r^2$$
$$= \pi R^2 - \pi t^2$$

II. Untuk bangun setengah bola

Δ OCD adalah Δ siku-siku, maka

$$CD = \sqrt{R^2 - t^2}$$

$$\text{Luas lingkaran} = \pi\, CD^2$$
$$= \pi\,(\sqrt{R^2 - t^2})^2$$
$$= \pi(R^2 - t^2)$$
$$= \pi R^2 - \pi t^2$$

Karena luas permukaan bidang potongnya sama, yaitu luas cincin = luas lingkaran (dalam hal ini = $\pi R^2 - \pi t^2$), maka menurut Postulat Cavalieri,

$$V_{\frac{1}{2}\text{bola}} = V_{\frac{1}{2}\text{tabung}} - V_{\text{kerucut}}$$

$$= \text{L alas} \times \text{tinggi} - \frac{1}{3}\text{L alas} \times \text{tinggi}$$

$$= \pi R^2 \times R - \frac{1}{3}\pi R^2 \times R$$

$$V_{\frac{1}{2}\text{bola}} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3, \text{ maka}$$

$$\boxed{V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

Bukti b

Untuk membuktikan luas permukaan bola = $4\pi R^2$, pandanglah volum bola itu sebagai jumlah volum kerucut-kerucut kecil yang alasnya dipermukaan bola dan titik-titik puncak kerucutnya terletak di titik pusat bola.

DAFTAR PUSTAKA

Biggs, Edith (1985). *Macmillian Junior Mathematics*. London: Macmillian Education Ltd.

Bitter, G.G. cs. (1981). *Mac Graw – Hill Mathematics*. New York: Mc. Graw – Hill Book Company, 1981.

Clemens, Stanley R, dkk (1984). *Geometry*. USA: Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Depdikbud. (1983). GBPP ***Mata Pelajaran Matematika. Kurikulum Matematika Sekolah dasar 1994.***

Rahardjo, Marsudi. (1998). ***Konsep-konsep Pengukuran (Bahan Penataran di Daerah).*** Yogyakarta: PPPG Matematika.