GEOMETRI DATAR

Disajikan pada :

Pelatihan Instruktur / Pengembang Matematika SMP Jejang Dasar

Tanggal 10 s.d. 23 Oktober 2004

Oleh:

Winarno, M.Sc.

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL

DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA

2004

DAFTAR ISI

Halaman

BAGIAN I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Pada saat ini di Indonesia digunakan kurikulum tahun 1994 yang memiliki perbedaan dengan kurikulum sebelumnya. Perubahan yang cukup banyak terdapat pada kurikulum matematika SLTP diantaranya adalah bertambahnya materi pelajaran pada unit geometri. Sebagian materi yang sebelumnya diajarkan di tingkat SMU sekarang diturunkan ke tingkat SLTP.

Geometri merupakan bagian dari matematika yang banyak membicarakan atau mempelajari bangun-bangun dengan sifat-sifatnya. Dalam kehidupan sehari-hari manusia banyak sekali berhubungan dan berkepentingan dengan bangun-bangun dengan pelbagai macam bentuk dan ukuran. Dengan demikian berarti geometri berperan besar dalam membantu manusia dalam pemecahan masalahnya sehari-hari. Pengajaran geometri di SLTP dimaksudkan untuk membekali siswa dengan pengetahuan yang dapat membantu pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari ataupun dalam memahami ilmu pengetahuan lain yang akan dipelajari lebih lanjut.

Kenyataan di lapangan saat ini menunjukkan bahwa pembelajaran geometri di sekolah khususnya di SLTP masih dijumpai banyak kesulitan maupun kekurangan. Untuk menanggulangi masalah itu diupayakan banyak langkah, antara lain melalui peningkatan kemampuan dan keterampilan guru melalui penataran diskusi, maupun dengan penerbitan tulisan atau buku pelajaran.

Paket ini dimaksudkan untuk membantu memecahkan pembelajaran geometri di SLTP pada bagian-bagian yang merupakan kesulitan pada umumnya.

B. Tujuan

Paket ini disusun dengan tujuan untuk meningkatkan kemampuan dan wawasan guru dalam melaksanakan tugas, khususnya dalam pembelajaran geometri di SLTP. Secara khusus uraian paket ini dapat dijadikan acuan dan bahan diskusi serta latihan pada penataran matematika guru SLTP.

C. Sasaran

Sasaran dari paket ini adalah :

1. Peserta penataran Guru Inti MGMP Matematika SLTP yang diselenggarakan di PPPG Matematika.
2. Para guru mata pelajaran matematika SLTP.

D. Ruang Lingkup

Ruang lingkup materi yang dibahas pada paket ini adalah :

1. Melukis bangun datar
2. Pendekatan deduktif-aksiomatik
3. Garis sejajar
4. Kesebangunan dan kongruensi
5. Transformasi bidang
6. Lingkaran

E. Pedoman Penggunaan Paket

Paket ini berisi uraian materi yang tercantum pada ruang lingkup tersebut di atas. Pada setiap akhir uraian materi diberikan soal latihan dengan maksud untuk memantapkan penyelesaian permasalahan materi tersebut. Kerjakan soal-soal itu dengan sungguh-sungguh secara urut tanpa ada yang terlewati. Dalam setiap pengerjaan soal jika diperlukan buatlah gambar sebaik-baiknya. agar dapat membantu mempermudah pemecahan masalahnya.

Apabila dalam mempelajari paket ini menemui kesulitan, maka dapat dibicarakan dengan penatar materi ini.

BAGIAN II

MELUKIS BANGUN DATAR

A. Lukisan Bangun Geometri

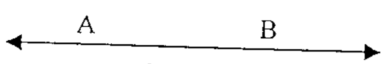
Lukisan bangun geometri pada dasarnya adalah upaya memvisualkan obyek-obyek geometri yang sifatnya abstrak agar lebih mudah dikomunikasikan dan dipahami. Dengan demikian agar obyek yang disampaikan melalui gambar atau lukisan itu dapat diterima secara benar oleh para siswa, maka dalam pembuatan lukisan bangun geometri itu harus diusahakan secara berhati-hati dan cermat.

Yang dimaksud dengan lukisan dalam uraian ini adalah proses mendapatkan gambar dari obyek tertentu dalam geometri (antara lain : garis, sudut, segitiga) dengan menggunakan peralatan utama berupa sebuah penggaris dan sebuah jangka, disamping pensil dan busur derajat. Dalam perkembangan dapat juga hanya digunakan sepasang penggaris siku-siku. Tetapi dalam banyak hal penggunaan jangka mutlak diperlukan.

Pada dasarnya lukisan apapun yang kita buat, misalnya lukisan segitiga atau segiempat selalu berupa rangkaian dari dua macam lukisan pangkal.

Yang dimaksud dengan dua lukisan pangkal yaitu :

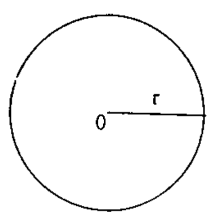
1. Melukis sebuah garis lurus (untuk selanjutnya disebut "garis") melalui dua buah titik berlainan yang diketahui.



Gb.2.1

Untuk melakukan lukisan pangkal ini digunakan penggaris.

2. Melukis busur lingkaran dengan titik pusat tertentu dan jari-jari yang panjangnya diketahui.



Gb.2.2

Untuk lukisan pangkal ini digunakan jangka.

Setiap lukisan selalu diperoleh dengan melakukan serangkaian kedua lukisan pangkal itu berulang-ulang.

Agar hasil lukisan baik dalam arti tepat bentuk dan ukurannya serta rapi dan bersih, maka dalam melakukan lukisan perlu diperhatikan benar-benar hal-hal berikut:

1. Gunakan pensil yang runcing.
2. Gunakan penggaris yang baik, tidak cacat permukaan tepinya.
3. Gunakan jangka yang baik, tidak goyah engsel, jarum maupun pensilnya dijamin runcing, tidak tumpul.
4. Siapkan karet penghapus pensil.
5. Pada saat menarik garis melalui dua buah titik usahakan agar kedua titik itu tepat terletak pada tepi penggaris dengan kedekatan yang sama, demikian juga tahan penggarisnya agar tidak goyah.
6. Pada saat melukis busur lingkaran, tetapkan dahulu pusat dan panjang jari-jarinya kemudian tusukkan jarum jangkanya tepat pada titik pusatnya.
7. Sebelum yakin benar akan ketepatan gambarnya buatlah garis-garisnya agak tipis lebih dahulu, setelah yakin benar garis-garisnya dapat ditebalkan.

Jika rambu-rambu di atas diperhatikan dalam setiap lukisan dan hal itu dilaksanakan secara konsekuen oleh para guru dalam proses pembelajarannya, maka pokok bahasan tentang "lukisan" akan dapat memiliki "nilai lebih" karena dapat menumbuhkembangkan sikap-sikap positif dalam bekerja yaitu sikap hati-hati, sistematis, bersih, rapi, dan cermat.

B. Melukis Segitiga

Segitiga merupakan bangun yang sangat penting dalam geometri karena bangun-bangun geometri lainnya dapat dibentuk dari segitiga-segitiga. Demikian juga sifat-sifat bangun tertentu banyak dapat dijelaskan melalui sifat-sifat segitiga.

Sebagai pengetahuan prasyarat untuk melukis segitiga perlu diingat kembali tentang ketidaksamaan pada sisi segitiga dan hubungan sudut dan sisi-sisi segitiga sebagai berikut :

1. Jika dua buah sisi pada sebuah segitiga tidak sama panjang maka sudut terbesar terletak dihadapan sisi yang terpanjang.

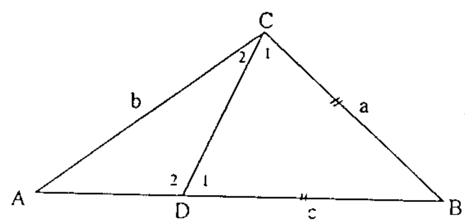
   Diketahui : segitiga ABC

   $AB > BC$ atau

   $c > a$

   Buktikan : $\angle C > \angle A$

   Bukti :



Tentukan titik D pada AB sehingga BC = BD. Hubungkan C dengan D, sehingga segitiga BCD adalah segitiga samakaki.

Gb.2.3

Segitiga BCD samakaki maka

$\angle C_1 = \angle D_1$

$\angle D_1 = \angle C_2 + \angle A$, akibatnya

$\angle C_1 = \angle C_2 + \angle A$

$\angle C_1 + \angle C_2 > \angle C_2 + \angle A$

$\angle C > \angle C_2 + \angle A$

$\angle C > \angle A$ (terbukti).

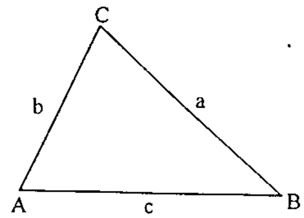
2. Jika dua buah sudut pada sebuah segitiga tidak sama, maka sisi terpanjang terletak dihadapan sudut yang terbesar.

   Diketahui : segitiga ABC

   $\angle A > \angle C$

   Buktikan : $a > c$

Bukti :



Gb.2.4

Dibuktikan dengan bukti tidak langsung. Ada tiga kemungkinan hubungan antara a dan c yaitu :

1) $a < c$
2) $a = c$
3) $a > c$

Perhatikan :

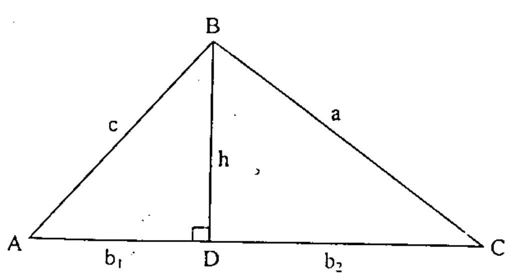
1) Jika $a < c$, maka $\angle A < \angle C$, hal ini bertentangan dengan ketentuan. Jadi $a < c$ salah.
2) Jika $a = c$, maka $\angle A = \angle C$, hal ini bertentangan dengan ketentuan.
3) Jadi pastilah $a > c$.

3. Dalam sebuah segitiga jumlah dua buah sisi, lebih panjang dari sisi yang ketiga.

   Diketahui : segitiga ABC

   Buktikan : $b < a + c$

   Bukti :



Buat BD tegak lurus AC

Gb.2.5

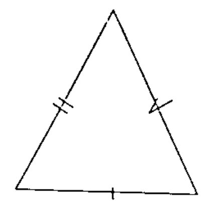
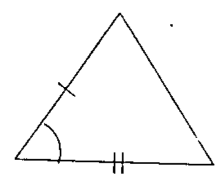
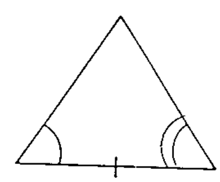
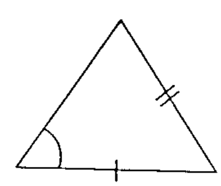
Dalam segitiga ABD, $b_1 < c$

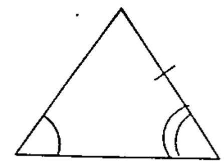
Dalam segitiga BDC, $b_2 < a$

$$\begin{array}{r} b_1 < c \\ b_2 < a \\ \hline b_1 + b_2 < a + c \end{array} +$$

$$b < a + c \qquad \text{(terbukti).}$$

Suatu segitiga dapat dilukis jika tiga dari enam unsurnya yaitu tiga buah sisi dan tiga buah sudut telah ditentukan sebagai berikut :

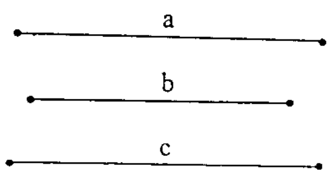
1. Ketiga buah sisi (s.s.s)	 (i)
2. Dua buah sisi dan sudut apitnya (s.sd.s)	 (ii)
3. Sebuah sisi dan kedua sudut yang terletak pada sisi tersebut (sd.s.sd)	 (iii)
4. Dua buah sisi dan sebuah sudut yang salah satu kakinya adalah salah satu sisi tadi (bukan sudut apit) (s.s.sd)	 (iv)

5. Sebuah sisi, sebuah sudut pada sisi itu dan sebuah sudut dihadapan sisi yang diketahui (s.sd.sd)	 (v)

Gb.2.6

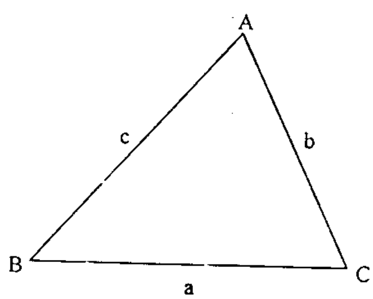
1. Melukis segitiga jika ditentukan ketiga sisinya (s.s.s).

   Diketahui : sisi a, sisi b, dan sisi c



Lukis : segitiga ABC

Lukisan :



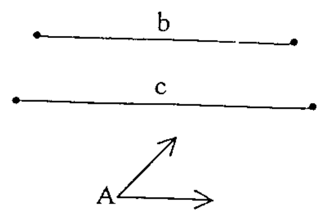
Gb. 2.7

Langkah-langkah :

1. Lukis ruas garis BC = a
2. Dengan pusat B lukis busur lingkaran dengan jari-jari c.
3. Dengan pusat C lukis busur lingkaran dengan jari-jari b yang memotong busur lingkaran pertama di A.
4. Hubungkan A ke B dan ke C, segitiga ABC terlukis.

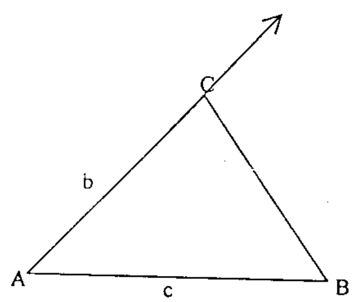
2. Melukis segitiga jika ditentukan dua buah sisi dan sudut apitnya (s.sd.s)

   Diketahui : sisi b, sisi c dan ∠ A.



   Lukis : segitiga ABC.

   Lukisan :



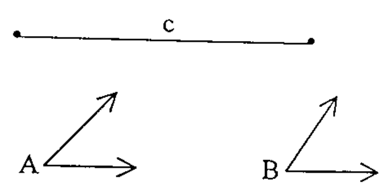
Gb.2.8

   Langkah-langkah

   1. Lukis ruas garis AB = c
   2. Lukis ∠ A di A
   3. Lukis AC = b pada kaki sudut A, bukan pada AB
   4. Hubungkan C ke B, maka segitiga ABC terlukis.

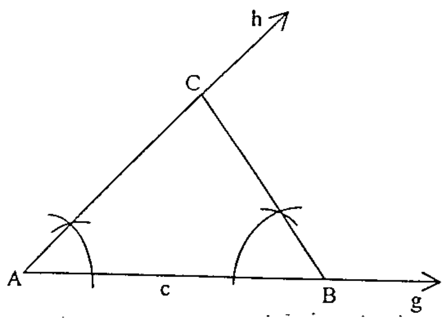
3. Melukis segitiga jika diketahui sebuah sisi dan kedua sudut yang terletak pada sisi tersebut (sd.s.sd).

   Diketahui : sisi c, ∠ A dan ∠ B



   Lukis : segitiga ABC

Lukisan :



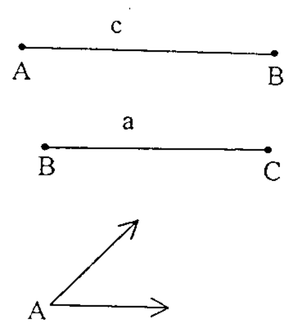
Gb.2.9

Langkah-langkah

1. Lukis ∠ A dengan kedua kaki sudutnya disebut sinar garis g dan h.
2. Lukis ruas garis AB = c pada g.
3. Lukis ∠ B pada titik B.
4. Kaki sudut B yang bukan BA memotong h di C.
5. Hubungkan A ke C maka segitiga ABC terlukis.

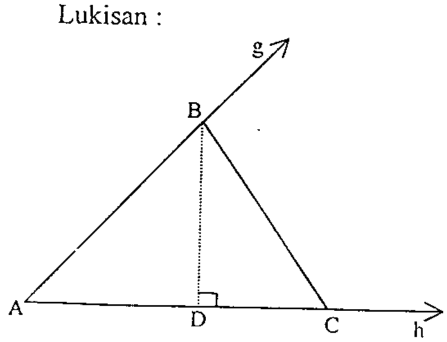
4. Melukis segitiga jika diketahui dua sisi, dan sebuah sudut (bukan sudut apitnya) (s.s.sd).

   Diketahui : AB = c, BC = a, dan ∠ A



Lukis : segitiga ABC

Lukisan :



Gb.2.10

Langkah-langkah

1. Lukis ∠ A dengan kedua kakinya sinar garis g dan h.
2. Lukis pada g ruas garis AB = c.
3. Dengan pusat B lukis busur lingkaran dengan jari-jari a, memotong h di C.
4. Hubungkan B ke C, maka segitiga ABC terlukis.

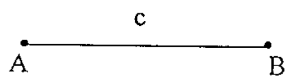
Pembicaraan :

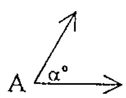
Lukis garis tegak lurus dari B ke AC yaitu BD

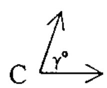
a. Jika a < BD, maka tidak ada segitiga yang terlukis.
b. Jika a = BD, maka terjadi segitiga ABC siku-siku di C.
c. Jika a > BD dan a < c, maka terdapat 2 buah segitiga yang memenuhi.
d. Jika a > BD dan a > c, maka terdapat sebuah segitiga yang memenuhi.

5. Melukis segitiga jika diketahui sebuah sisi, sebuah sudut pada sisi itu dan sebuah sudut dihadapan sisi yang diketahui (s.sd.sd).

Diketahui : sisi AB = c, $\angle$ A = α^o dan $\angle$ C = γ^o

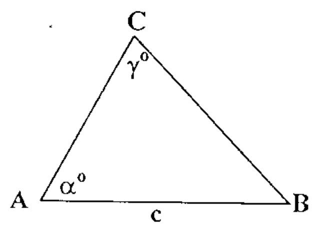






Lukis : segitiga ABC

Persiapan/analisa :

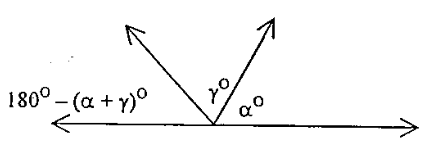


Gb.2.11

Misalkan segitiga ABC disamping adalah segitiga yang akan dilukis, maka $\angle$ B = $180^o - (\alpha + \gamma)^o$ dapat dilukis.

Sehingga segitiga ABC dapat dilukis dengan unsur yang diketahui $\angle$ A, sisi AB dan $\angle$ B (sd.s.sd).

Lukisan :

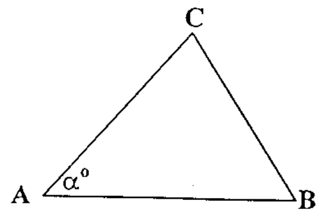


Gb.2.12

Langkah-langkah

1. Melukis $\angle$ B = $180^o - (\alpha + \gamma)^o$.
2. Melukis $\angle$ A = α^o.
3. Menentukan AB = c.
4. Melukis $\angle$ B.

5. Menentukan titik C.
6. Segitiga ABC terlukis.



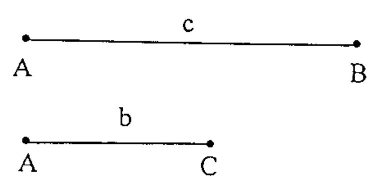
Gb.2.13

Dalam hal melukis segitiga kadang-kadang dijumpai bahwa unsur-unsur yang diketahui tidak seperti yang tersebut di atas (pokok lukisan segitiga) tetapi unsur-unsur yang lainnya. Dengan menggunakan persiapan atau analisa terlebih dahulu dari unsur-unsur yang diketahui barulah akhirnya segitiga itu dapat dilukis. Sebagai contoh sebagai berikut :

Contoh 1 :

Melukis segitiga siku-siku yang diketahui hypotenusa dan salah satu sisi siku-sikunya.

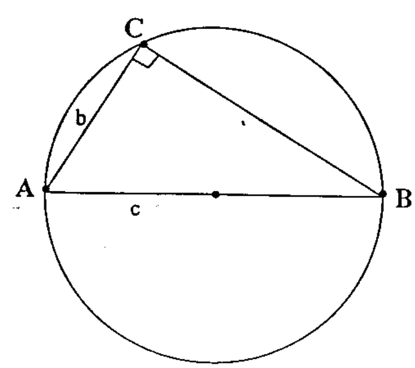
Diketahui : Dari segitiga ABC siku-siku di C dengan sisi AB = c dan sisi AC = b



Lukis segitiga ABC.

Persiapan :

Misal segitiga yang akan dilukis adalah segitiga ABC yang siku-siku di C seperti Gb.2.14, maka $\angle$ C = 90° = ½ × busur setengah lingkaran dengan diameter AB. Sehingga C terletak pada busur lingkaran yang berdiameter AB dengan AC = b.

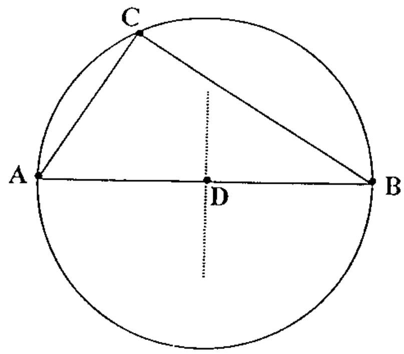


Gb.2.14

Lukisan :

Langkah-langkah :

1. Melukis AB = c
2. Membagi AB menjadi 2 bagian yang sama.
3. Melukis busur setengah lingkaran dengan pusat tengah-tengah AB dan jari-jari = ½ AB.
4. Dengan pusat A dilukis busur lingkaran dengan jari-jari b memotong busur (3) dititik C.
5. Hubungkan B dengan C.
6. Segitiga ABC terlukis.

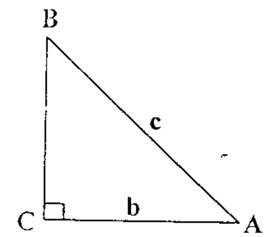


Gb.2.15

Cara lain :

Persiapan :

Misal segitiga ABC siku-siku yang akan dilukis seperti gambar di samping.



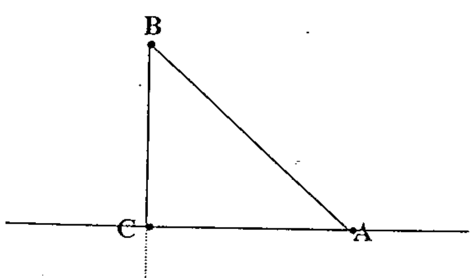
Gb.2.16

Karena segitiga ABC siku-siku di C maka $\angle$ C = 90°, sehingga unsur yang diketahui adalah :

Sisi AB = c, sisi AC = b dan $\angle$ C = 90°.

(s.s.sd) sehingga segitiga ABC dapat dilukis.

Lukisan :



Gb.2.17

Langkah-langkah :

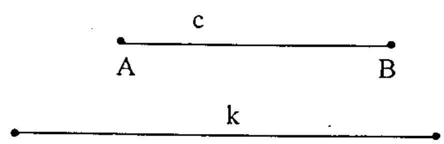
1. Lukis $\angle$ C = 90°
2. Lukis AC = b
3. Dengan A sebagai pusat lukis busur dengan jari-jari c, sehingga memotong kaki sudut C di B.
4. Segitiga ABC terlukis.

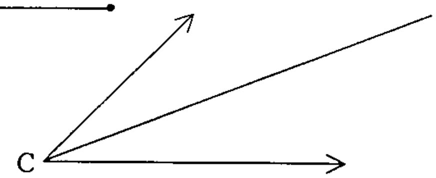
Contoh 2 :

Melukis segitiga jika diketahui alasnya, sudut puncaknya dan jumlah kedua sisi tegak.

Diketahui : Alas AB = c, $\angle C$

dan AC + BC = k

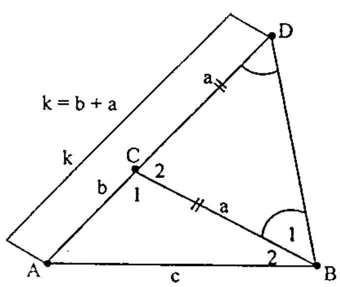




Lukis : segitiga ABC.

Persiapan :

Misal segitiga ABC yang akan dilukis. Jika AC diperpanjang dengan CD = BC maka AD = AC + BC = b + a = k.



Gb.2.18

Segitiga BCD samakaki, maka $\angle B_1 = \angle D$

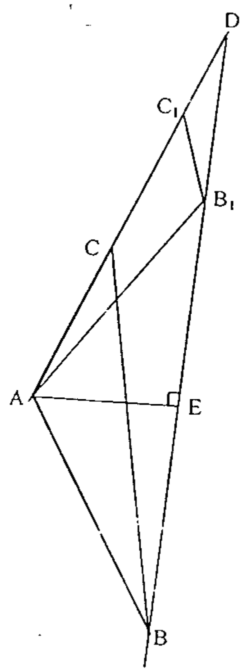
$\angle C_1 = \angle B_1 + \angle D = 2 \angle D$

atau

$$\left.\begin{aligned} &\angle D = \tfrac{1}{2} \angle C_1 \\ &AD = k \\ &AB = c \end{aligned}\right\} \Delta\, ABD \text{ dapat dilukis}$$

Dengan melukis $\angle B_1 = \angle D$ maka C dapat ditentukan sehingga Δ ABC dapat dilukis.

Lukisan :



Gb.2.19

Langkah-langkah :

1. Melukis Δ ABD dengan

   AD = AC + BC = k

   AB = c

   $\angle D = \frac{1}{2} \angle C$. (s.s.sd)

2. Ukurkan $\angle DBC = \angle D$ sehingga diperoleh C.

3. Segitiga ABC terlukis.

Bukti :

Δ ABC memenuhi unsur yang diketahui sebab

AB = c

$\angle B_1 = \angle D = \frac{1}{2} \angle C_1 = \frac{1}{2} \angle C$

Sehingga $\angle C = 2 \angle D$

Δ BCD samakaki sehingga BC = CD

AC + CD = AC + BC = k

Sehingga Δ ABC yang terlukis memenuhi persyaratan yang telah ditentukan.

Pembicaraan :

Jika dibuat AE ⊥ BD maka terdapat kemungkinan :

1) c < AE, maka tak terlukis segitiga
2) c = AE, maka terdapat sebuah segitiga
3) AE < c < AD, maka terdapat dua buah segitiga
4) c = AD. maka tak terlukis segitiga.

Latihan 1 :

1. Lukislah segitiga ABC jika ditentukan
   a. AB = 7 cm, BC = 6 cm, AC = 5 cm
   b. AB = 3 cm, BC = 6 cm, AC = 5 cm.
2. Lukislah segitiga samasisi yang kelilingnya 18 cm.
3. Jika ditentukan
   a. AB = 7 cm, BC = 2 cm, AC = 4 cm
   b. AB = 6 cm, BC = 2 cm, AC = 4 cm

   Dapatkah segitiga ABC dilukis ? Jelaskan.
4. Lukislah segitiga ABC jika ditentukan
   a. AB = 6 cm, $\angle$ A = 30°, AC = 4 cm
   b. AC = BC = 5 cm, $\angle$ C = 120°

   (sudut harus dilukis)
5. Lukislah segitiga PQR jika ditentukan
   a. PQ = 8 cm, $\angle$ Q = 30°, PR = 5 cm

      Berapa segitiga yang memenuhi syarat ?
   b. Ulangi soal a dengan mengganti panjang PR = 4 cm, dan dengan mengganti PR = 3 cm.
6. Lukis segitiga ABC jika diketahui

   AB = c, $\angle$ C = $\gamma°$ dan selisih antara AC dan BC sama dengan k.
7. Lukislah segitiga samakaki jika diketahui sebuah sudut alas dan garis bagi sudut alas itu.
8. Lukislah sebuah segitiga ABC jika diketahui sisi a, sisi b dan garis berat dari titik sudut C (m_c).

C. Melukis Segibanyak Beraturan

Suatu segibanyak yang semua sisinya sama panjang, dan semua sudutnya sama besar disebut segibanyak beraturan. Segitiga samasisi, persegi merupakan segibanyak beraturan.

Telah diketahui bahwa untuk segi n jumlah besar sudut-sudutnya adalah $(n - 2) \times 180^o$. Sehingga tiap sudut sebuah segi n beraturan besarnya adalah $\frac{(n-2)\times 180^o}{n}$.

Contoh :

Segitiga : jumlah besar sudutnya adalah $(3 - 2) \times 180^o = 180^o$.

Sehingga untuk segitiga samasisi, tiap sudut besarnya adalah $\frac{180^o}{3} = 60^o$.

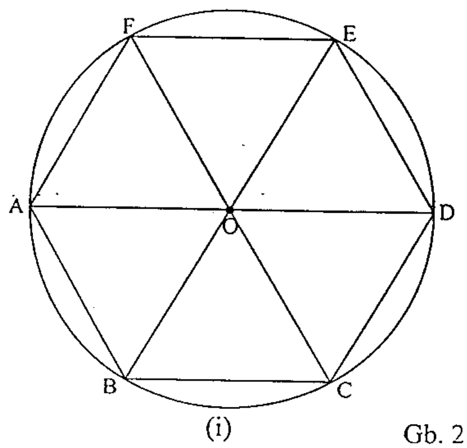
Segiempat : jumlah besar sudutnya adalah $(4 - 2) \times 180^o = 360^o$.

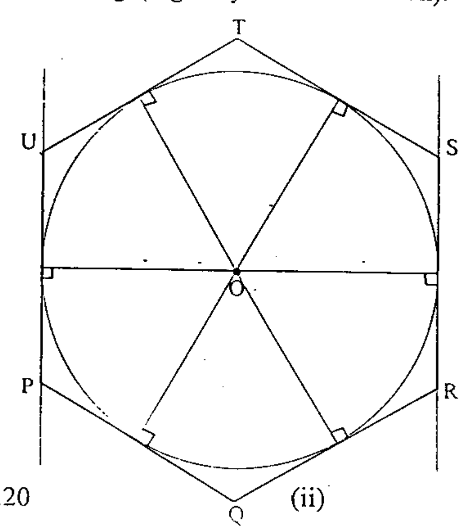
Sehingga untuk persegi (segiempat beraturan). tiap sudut besarnya adalah $\frac{360^o}{4} = 90^o$.

Jika pada keliling sebuah lingkaran terdapat n buah titik-titik yang membagi suatu lingkaran dalam n busur-busur yang sama maka terbentuklah suatu segibanyak beraturan oleh :

a. Tali busur-tali busur yang menghubungkan titik bagi-titik bagi yang beraturan (segibanyak dalam beraturan).
b. Garis singgung – garis singgung di titik-titik bagi (segibanyak luar beraturan).

Contoh :





Gb. 2.20

Pada paket ini selanjutnya hanya dibahas segibanyak dalam beraturan. Perhatikan Gb.2.20 (i), suatu segitiga samakaki yang beralas sebuah sisi segibanyak beraturan dan berpuncak di titik pusatnya dinamakan segitiga titik pusat segibanyak beraturan (misal Δ AOB, Δ BOC, Δ COD, dan sebagainya). Sudut puncak segitiga samakaki tadi disebut sudut titik pusat segibanyak beraturan (misal ∠ AOB, ∠ BOC, ∠ COD dan sebagainya).

D. Menghitung Panjang Sisi Segi n Beraturan.

Jika S_n menyatakan sisi segi n beraturan dengan lingkaran luar (P, R) maka S_n dapat dinyatakan dalam R untuk harga-harga n yang diketahui.

Contoh :

Nyatakanlah S_n dalam R untuk :

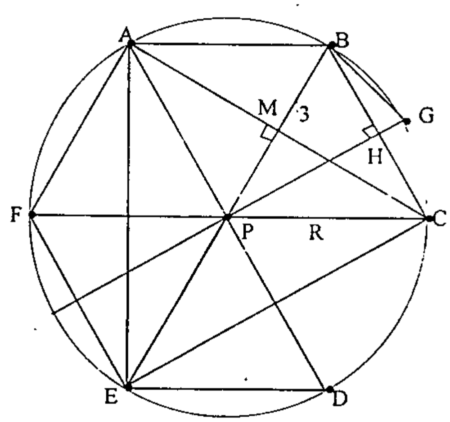
a. $n = 3$, $n = 6$, dan $n = 12$

b. $n = 4$, $n = 8$

c. $n = 5$, $n = 10$

Penyelesaian :

Perhatikan Gb.2.21 di bawah ini



Gb.2.21

a.1) Untuk $n = 3$, didapat S_3 sebagai sisi dari segitiga samasisi diperoleh :

$$AM^2 = AP^2 - PM^2$$

$$= R^2 - \frac{1}{4}R^2$$

$$= \frac{3}{4}R^2$$

Maka $AM = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$

Sehingga $AC = R\sqrt{3}$

Jadi $S_3 = R\sqrt{3}$

2) Untuk $n = 6$ didapat S_6 sebagai berikut :

Perhatikan Δ ABP, $\angle APB = 60^\circ$, $AP = BP$.

Sehingga Δ ABP adalah segitiga samasisi.

Jadi $AB = BP = AP = R$

Oleh karena itu $S_6 = R$

3) Untuk $n = 12$, didapat S_{12} sebagai berikut :

Perhatikan Δ BPG, $\angle BPG = \frac{360^o}{12} = 30^o$.

$PB = R$; $PG = R$

$\frac{PH}{PB} = \cos 30^o$ $\qquad$ $\frac{BH}{PB} = \sin 30^o$

$PH = R \cos 30^\circ$ $\qquad$ $BH = R \sin 30^\circ$

$PH = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$ $\qquad$ $BH = \frac{1}{2}R$

$HG = R - \frac{1}{2}R\sqrt{3}$

Maka :

$BG^2 = BH^2 + HG^2$

$= (\frac{1}{2}R)^2 + (R - \frac{1}{2}R\sqrt{3})^2$

$= \frac{1}{4}R^2 + R^2 - R^2\sqrt{3} + \frac{3}{4}R^2$

$= 2R^2 - R^2\sqrt{3}$

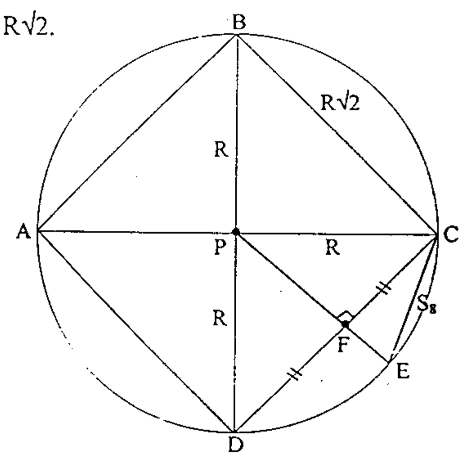
$= R^2(2 - \sqrt{3})$

Sehingga diperoleh :

$BG = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Jadi $S_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b.1) Untuk n = 4, diperoleh persegi yang panjang diagonalnya adalah 2R sehingga sisinya adalah $R\sqrt{2}$.



Gb.2.22

2) Untuk n = 8 diperoleh S_8 = CE (Gb.2.22) sebagai berikut :

Perhatikan Δ PCF

$PF^2 = PC^2 - CF^2$

$= R^2 - (\frac{1}{2}R\sqrt{2})^2$

$= R^2 - \frac{1}{2}R^2$

$= \frac{1}{2}R^2$

$PF = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$

Sehingga diperoleh $FE = R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}$

Perhatikan Δ CEF

$CE^2 = CF^2 + FE^2$

$= (\frac{1}{2}R\sqrt{2})^2 + (R - \frac{1}{2}R\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2}R^2 + R^2 - R^2\sqrt{2} + \frac{1}{2}R^2$

$= 2R^2 - R^2\sqrt{2}$

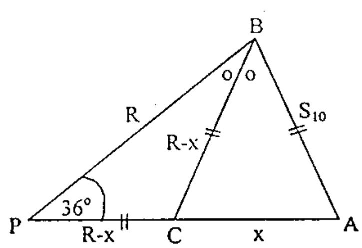
$= R^2(2 - \sqrt{2})$

$CE = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Jadi $S_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

c.1) Untuk n = 5 diperoleh S_5.

Untuk n = 10 diperoleh S_{10}



Gb.2.23

Perhatikan Gb.2.23

Δ PAB merupakan segitiga pusat dari segi 10 beraturan $\angle APB = \frac{360^o}{10} = 36^o$

$\angle PAB = \angle PBA = 72^o$

AB merupakan sisi dari segi sepuluh beraturan.

Jika BC merupakan garis bagi ∠ B diperoleh Δ ABC samakaki yang sebangun dengan Δ APB. Sehingga diperoleh :

AC : AB = AB : AP

$x : (R - x) = (R - x) : R$

$xR = (R - x)^2$

$xR = R^2 - 2Rx + x^2$

$x^2 - 3Rx + R^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 4R^2}}{2}$$

$$= \frac{3R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3R + R\sqrt{5}}{2} \quad \text{atau} \quad x_2 = \frac{3R - R\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R\sqrt{5} \qquad x_2 = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}R\sqrt{5}$$

Dipilih $x = x_2 = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}R\sqrt{5}$

Sehingga diperoleh $S_{10} = R - x$

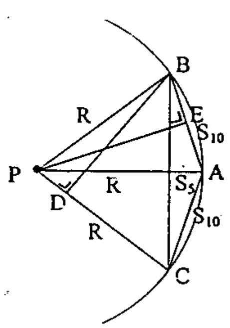
$$= R - (\frac{3}{2}R - \frac{1}{2}R\sqrt{5})$$

$$= -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}R\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{2}R(-1 + \sqrt{5})$$

Jadi $S_{10} = \frac{1}{2}R(-1 + \sqrt{5})$.

Untuk menentukan sisi segilima beraturan (S_5) dihitung dengan pertolongan S_{10} sebagai berikut :



Gb. 2.24

Jika Δ BPA dan Δ APC adalah segitiga titik pusat suatu segi sepuluh beraturan maka $S_5 = BC$.

$$\angle BPC = \frac{360^o}{5} = 72^o$$

$\angle$ PBA = 72° (merupakan sudut alas dari segitiga pusat segi sepuluh beraturan)

$\angle BEP = \angle BDP = 90^\circ$.

Sehingga Δ PBE dan Δ BPD kongruen, jadi PD = BC atau PD = $\frac{1}{2}S_{10}$

$$PD = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}R(-1+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}R(-1+\sqrt{5})$$

Perhatikan Δ PBC :

$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2PD \,.\, PC \quad \text{(dalil proyeksi)}$$

$$= R^2 + R^2 - 2.\frac{1}{4}R(-1+\sqrt{5}).R$$

$$= 2R^2 - \frac{1}{2}R^2(-1+\sqrt{5})$$

$$= \frac{5}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2\sqrt{5}$$

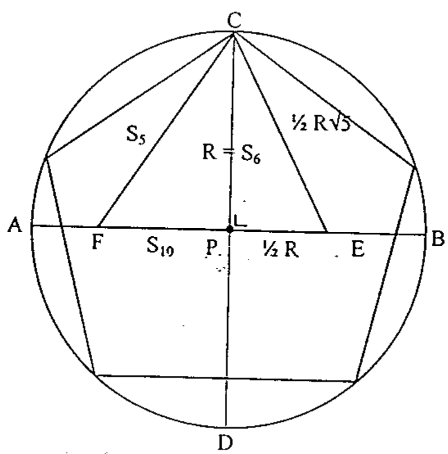
$$= \frac{1}{2}R^2(5-\sqrt{5})$$

$$BC = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Jadi $S_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

E. Melukis Segilima Beraturan.

Apabila jari-jari lingkaran luar segilima beraturan diketahui sama dengan R, maka cara melukis segilima beraturan tersebut adalah sebagai berikut :



Gb.2.25

1. Lukis lingkaran dengan pusat P, jari-jari R.
2. Lukis garis tengah AB dan CD yang saling tegak lurus.
3. Lukis titik E = tengah-tengah AB sehingga PE = $\frac{1}{2}$R, maka

$$EC = \frac{1}{2}R\sqrt{5}.$$

4. Dengan pusat E jangkakan busur dengan jari-jari = EC sehingga memotong PA di F.
5. FC = S_5
6. FC sebagai talibusur pada lingkaran (P, R) dijangkakan 5 kali.
7. Segilima beraturan terlukis.

Bukti :

Perhatikan Gb.2.25 di atas.

$$PE = \frac{1}{2}R$$

$$CE = \frac{1}{2}R\sqrt{5} \quad ; \quad FE = \frac{1}{2}R\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} FP &= FE - PE \\ &= \frac{1}{2}R\sqrt{5} - \frac{1}{2}R \\ &= \frac{1}{2}R(-1+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Jadi $FP = \frac{1}{2}R(-1+\sqrt{5}) = S_{10}$.

Perhatikan Δ CFP

$$\begin{aligned} CF^2 &= PC^2 + FP^2 \\ &= R^2 + (\frac{1}{2}R\sqrt{5} - \frac{1}{2}R)^2 \\ &= R^2 + \frac{5}{4}R^2 - \frac{1}{2}R^2\sqrt{5} + \frac{1}{4}R^2 \\ &= \frac{5}{2}R^2 - \frac{1}{2}R^2\sqrt{5} \\ &= \frac{1}{2}R^2(5-\sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CF &= \sqrt{\frac{1}{2}R^2(5-\sqrt{5})} \\ &= \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Jadi $CF = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} = S_5$ (terbukti).

Catatan :

1) Untuk melukis segi sepuluh beraturan dapat dilakukan dengan menjangkakan FP sebagai tali busur 10 kali pada lingkaran luar.
2) Terdapat hubungan :

$$S_{10}^2 + S_6^2 = S_5^2$$

Contoh :

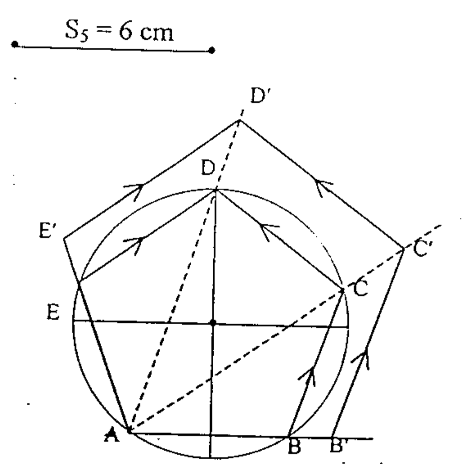
Lukislah segilima beraturan dengan panjang sisinya 6 cm.

Penyelesaian :

Apabila yang diketahui adalah panjang sisi segilima beraturan, maka tidaklah mudah menentukan panjang jari-jari lingkaran luarnya. Oleh karena itu untuk melukis segilima beraturan tersebut dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

Lukislah segilima beraturan dengan jari-jari lingkaran luar sembarang. Kemudian memperbanyak bangun-bangun segilima beraturan tersebut sehingga segilima beraturan yang dimaksud diperoleh.

Lukisan :



Gb.2.26

Langkah-langkahnya :

1. Melukis sembarang segilima beraturan ABCDE dengan jari-jari lingkaran luar R.
2. Memperbanyak bangun ABCDE menjadi AB'C'D'E' dengan memperpanjang :

a) AB menjadi AB′ = 6 cm

b) Memperpanjang AE menjadi AE′ = 6 cm

c) Tarik garis B′C′ // BC dengan B′C′ = 6 cm

d) Tarik garis D′E′ // DE dengan D′E′ = 6 cm.

3. Terlukis segilima beraturan AB′C′D′E′ yang diminta.

Latihan 2.

1. Lukislah segilima beraturan dengan panjang jari-jari lingkaran luarnya 5 cm.
2. Lukislah segilima beraturan dengan panjang sisinya 5 cm.
3. Lukislah segienam beraturan dengan panjang sisinya 6 cm.
4. Lukislah segidelapan beraturan dengan panjang jari-jari lingkaran luarnya 6 cm.
5. Lukislah segidelapan beraturan dengan panjang sisinya 6 cm.

BAGIAN III

SUSUNAN DEDUKTIF – AKSIOMATIK

A. Perkembangan Pengajaran Geometri

Pengajaran geometri telah mengalami beberapa perkembangan dari pengajaran pada awalnya. Pada tahap pertama obyek atau hal-hal yang diselidiki dalam geometri adalah benda-benda alam yang kongkrit, misalnya kubus kayu, balok bata, tumpukan padi yang berupa kerucut, sebidang tanah dan sebagainya. Sedangkan metode yang dipakai adalah empiris, dalil-dalilnya ditetapkan dengan induksi, metode yang digunakan adalah metode empiris. Pada tahap ini belum terdapat usaha untuk mencari hubungan logis antara dalil yang satu dengan dalil yang lain.

Perkembangan pada tahap berikutnya, obyek yang diselidiki dalam geometri mengalami pergantian dari benda kongkrit (benda alam) ke benda pikiran yang diperoleh dari benda alam dengan dilakukannya abstraksi dan idealisasi. Dengan melakukan abstraksi dimaksudkan bahwa dari sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu benda hanya sebagian saja sifat yang diperhatikan misalnya besar dan bentuknya. Sifat-sifat lain seperti warna, berat, sifat bahannya tidak diperhatikan. Sedangkan idealisasi berarti penyempurnaan. Sebuah papan tulis yang kita sempurnakan tebalnya sehingga tebalnya kita jadikan nol maka terjadilah bidang. Seutas tali kita sempurnakan kecilnya sehingga tebal dan lebarnya lenyap tinggallah panjangnya saja, maka terdapat garis dan sebagainya.

Pada tahap ini dikenallah obyek geometri yang berupa titik, garis dan bidang yang berupa benda pikiran. Metode yang digunakan untuk mendapatkan fakta-faktanya dan menetapkan hukum-hukumnya dengan penalaran deduktif. Dalil yang baru dapat diperoleh dari dalil-dalil sebelumnya.

Setelah dikenalnya benda pikiran sebagai obyek geometri akhirnya geometri disusun dalam susunan aksiomatik. Dalam susunan ini ditetapkan sekelompok pengertian yang tidak didefinisikan dan cukup jelas, yang disebut pengertian pangkal. Disamping itu ditetapkan sekelompok pernyataan yang tidak diragukan kebenarannya tanpa harus dibuktikan, yang disebut aksioma. Dari aksioma dapat diturunkan dalil secara deduktif. Oleh karenanya mulai saat inilah dikenal suatu metode dalam geometri yang disebut deduktif-aksiomatik.

B. Susunan Deduktif-Aksiomatik

Penalaran deduktif merupakan cara penarikan kesimpulan dari hal yang umum ke hal yang khusus. Ilmu deduktif ialah suatu sistem I dari pernyataan-pernyataan yang memenuhi syarat sebagai berikut :

1. Semua pernyataan I harus mengenai satu daerah hal-hal yang nyata
2. Semua pernyataan I harus akurat
3. Jika beberapa pernyataan merupakan anggota I, maka tiap-tiap kesimpulan logis dari pernyataan-pernyataan itu adalah juga anggota I.
4. Dalam I dapat ditunjuk sekelompok istilah dengan syarat sebagai berikut :
    a. Arti istilah-istilah itu tidak memerlukan penjelasan, yang disebut pengertian pangkal.
    b. Arti semua istilah lainnya yang terdapat dalam I harus dapat diterangkan (didefinisikan) dengan istilah-istilah tadi.
5. Dalam I dapat ditunjuk sekelompok pernyataan dengan sifat-sifat sebagai berikut:
    a. Kebenaran pernyataan itu jelas tanpa bukti
    b. Semua pernyataan I lainnya harus dapat diperoleh dari pernyataan-pernyataan tadi dengan cara deduktif.

Penalaran deduktif disebut juga penalaran silogistik. Dalam silogisma dikenal tiga pernyataan sebagai premis mayor, premis minor dan kesimpulan.

Contoh :

PREMIS MAYOR	PREMIS MINOR	KESIMPULAN
1. Semua sudut yang bertolak belakang adalah sama.	$\angle$ A dan $\angle$ B adalah sudut bertolak belakang.	$\angle A = \angle B$
2. Segitiga tumpul hanya mempu-nyai sebuah sudut tumpul.	Δ ABC adalah segitiga tumpul	Δ ABC Hanya mempunyai sebuah. sudut tumpul.

Dari uraian di atas, maka dapat diketahui bahwa struktur ilmu aksiomatik terdiri dari 2 deretan sebagai berikut :

Ilmu Aksiomatik

Kelompok pengertian (unsur dan relasi) Pangkal	Kelompok pernyataan pangkal (aksioma)
↓ definisi	↓ bukti
pengertian bukan pangkal	dalil (teorema)
↓ definisi	↓ bukti
pengertian bukan pangkal	dalil (teorema)
↓ definisi	↓ bukti
dan seterusnya	dalil (teorema)
	↓ bukti
	dan seterusnya

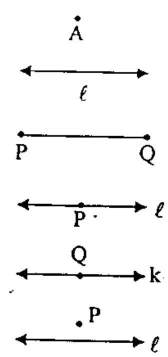
C. Pengertian Pangkal, Aksioma dan Teorema (Dalil)

Dalam pengajaran geometri di SLTP secara khusus diberikan model struktur deduktif-aksiomatik yaitu pada pokok bahasan Garis-garis Sejajar. Sehingga perlu dimulai dengan menetapkan pengertian pangkal atau konsep primitif, diperkenalkan sekumpulan aksioma, definisi serta terorema.

Beberapa pengertian pangkal dan definisi yang ditetapkan pada susunan ini ialah :

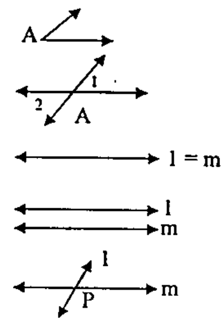
Pengertian Pangkal

1. Titik
2. Garis
3. Ruas garis
4. Titik terletak pada garis
5. Garis melalui titik
6. Titik di luar garis



Definisi

1. Sudut
2. Sudut bertolak belakang
3. Berimpit
4. Sejajar
5. Berpotongan



Gb.3.1

Sistem Aksioma dan Teorema

Aksioma – 1	: Ada sekurang-kurangnya dua titik yang berbeda
Aksioma – 2	: Melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat tepat satu garis
Aksioma – 3	: Tiap garis sekurang-kurangnya memuat dua titik yang berbeda
Aksioma – 4	: Ada titik di luar garis
Aksioma – 5	: Melalui sebuah titik tertentu di luar garis yang diketahui dapat dibuat tepat satu garis sejajar garis yang diketahui.

Dari sistem aksioma tersebut di atas dapat diturunkan beberapa teorema yang kebenarannya dapat dibuktikan berdasarkan aksioma-aksioma tersebut.

Teorema –1 : Ada sekurang-kurangnya sebuah garis.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Sekurang-kurangnya ada dua titik yang berbeda 2. Ada tepat satu garis dapat dibuat melalui dua titik berbeda. Jadi benar ada sekurang-kurangnya sebuah garis.	1. Aksioma – 1 2. Aksioma –2

Teorema – 2 : Ada sekurang-kurangnya tiga titik berbeda yang tidak terletak pada satu garis.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Sekurang-kurangnya ada sebuah garis 2. Sebuah garis sekurang-kurangnya memuat dua titik berbeda, misalnya titik P dan Q. 3. Ada titik di luar sebuah garis yang melalui P dan Q, misalnya titik K. Jadi benar sekurang-kurangnya ada tiga titik berbeda yang tidak terletak pada satu garis.	1. Teorema – 1 2. Aksioma – 3 3. Aksioma – 4

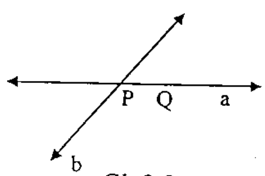
Teorema – 3 : Ada sekurang-kurangnya tiga garis berbeda.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Sekurang-kurangnya ada tiga titik berbeda yang tidak terletak pada satu garis, misalnya P, Q dan R	1. Teorema -2
2. Melalui dua titik yang berbeda dapat dibuat tepat satu garis. Jadi ada satu garis melalui P dan Q, ada satu garis melalui P dan R, serta ada satu garis melalui Q dan R, maka benar sekurang-kurangnya ada tiga garis berbeda.	2. Aksioma -2

Teorema – 4 : Jika dua buah garis berbeda berpotongan pada satu titik, maka kedua garis itu mempunyai tepat satu titik serikat.

Teorema – 4 itu dibuktikan dengan pembuktian tidak langsung sebagai berikut. Perhatikan gambar 3.2.



Gb.3.2

Diketahui :

Garis-garis a dan b berpotongan di P.

Buktikan : Hanya P merupakan titik serikat a dan b.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Misalkan antara garis-garis a dan b masih mempunyai titik serikat lain, disebut titik Q.	1. Pengandaian yang merupakan ingkaran dari yang diketahui.
2. P pada a dan b, Q juga pada a dan b atau P dan Q pada a P dan Q juga pada b.	2. Definisi -5
3. Berarti garis a dan b harus sama atau berimpit.	3. Aksioma -2
4. Ini tidak mungkin terjadi (pengandaian salah)	4. Bertentangan dengan yang diketahui.
5. Jadi tidak mungkin a dan b mempunyai titik serikat selain P.	5. Ingkaran dari pengandaiannya bahwa a dan b mempunyai titik serikat lain yang ternyata salah.

Teorema-teorema lain tentang kesejajaran akan dibahas pada bagian IV.

BAGIAN IV
GARIS-GARIS SEJAJAR

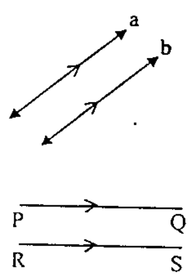
A. Garis-garis Sejajar

1. *Pengertian garis sejajar*

Dua garis lurus a dan b disebut sejajar satu sama lain apabila garis a dan b terletak dalam satu bidang datar, dan tidak berpotongan.

Simbol sejajar adalah ||, sehingga a || b dibaca "a sejajar b".

Pada gambar tanda anak panah digunakan untuk menunjukkan garis sejajar.



Kedua garis a dan b sejajar

Ruas garis PQ sejajar ruas garis RS, sebab garis yang memuat PQ sejajar dengan garis yang memuat RS.

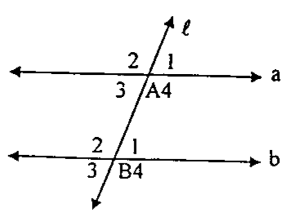
Gb.4.1

2. *Transversal.*

Transversal dari dua garis sejajar adalah sebuah garis yang memotong kedua garis tersebut.

Contoh :

Garis ℓ merupakan transversal dari garis a dan b (Gambar 4.2).



Gb.4.2

Sudut yang terbentuk oleh dua garis sejajar yang dipotong oleh transversal yang berada diantara kedua garis sejajar disebut sudut dalam (interior angles), sedangkan dibagian luarnya disebut sudut luar (exterior angles).

Sehingga pada Gb.4.2.

$\angle A_3$, $\angle A_4$, $\angle B_1$ dan $\angle B_2$ disebut sudut dalam

$\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle B_3$ dan $\angle B_4$ disebut sudut luar

$\left.\begin{array}{l}\angle A_3 \text{ dan } \angle B_2\\ \angle A_4 \text{ dan } \angle B_1\end{array}\right\}$ disebut sudut dalam sepihak

$\left.\begin{array}{l}\angle A_3 \text{ dan } \angle B_1\\ \angle A_4 \text{ dan } \angle B_2\end{array}\right\}$ disebut sudut dalam berseberangan

$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 \text{ dan } \angle B_4\\ \angle A_2 \text{ dan } \angle B_3\end{array}\right\}$ disebut sudut luar sepihak

$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 \text{ dan } \angle B_3\\ \angle A_2 \text{ dan } \angle B_4\end{array}\right\}$ disebut sudut luar berseberangan

Sedangkan

$\angle A_1$ dan $\angle B_1$ disebut sudut sehadap, demikian juga

$\angle A_2$ dan $\angle B_2$ sebutkan sudut sehadap yang lain.

3. *Melukis garis-garis sejajar.*

Untuk melukis garis sejajar dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

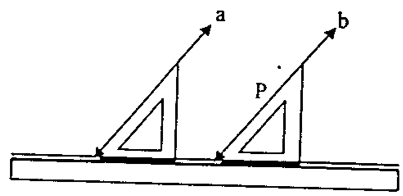
1) Dengan menggunakan mistar dan penggaris segitiga siku-siku. Untuk melukis garis melalui sebuah titik sejajar dengan garis yang diketahui.

   Diketahui : Garis a dan titik P di luar a.

   Lukis : Garis b melalui titik P dan sejajar garis a.

   Langkah-langkah :

   a. Impitkan sisi miring penggaris segitiga siku-siku pada garis a.
   b. Letakkan mistar rapat pada sisi salah satu sisi siku-sikunya.
   c. Geserlah penggaris segitiga siku-siku, dengan sisi siku-sikunya tetap rapat dengan mistar sehingga sisi miring segitiga siku-siku melalui titik P.
   d. Buatlah garis b sepanjang sisi miring penggaris segitiga.

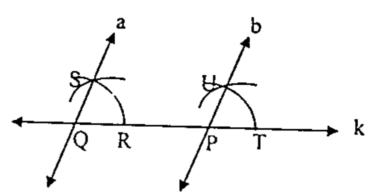


Gb.4.3

2) Dengan menggunakan mistar dan jangka.

Langkah-langkah :

a. Tentukan titik Q pada a
b. Lukis $\overline{PQ} = k$
c. Diperoleh $\angle Q = \angle(a, k)$
d. Dengan pusat Q, lukis sebuah busur yang memotong kaki sudut Q di titik R dan S.
e. Dengan pusat P, Lukis busur dengan jari-jari QR sehingga memotong garis PQ di T.
f. Dengan pusat T, lukis busur dengan jari-jari RS memotong busur kedua di U.
g. Lukis garis b melalui P dan U, maka b || a.

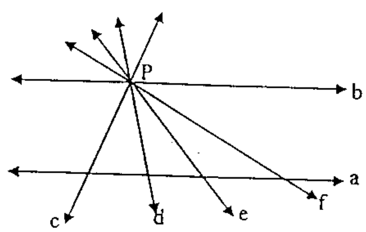


Gb.4.4

B. Aksioma dan Teorema Kesejajaran

Aksioma yang berkaitan dengan garis sejajar kita sebut dengan aksioma kesejajaran yaitu aksioma – 5 yang telah disebut dalam sistem aksioma pada bagian III yang bunyinya : *"Melalui sebuah titik tertentu di luar garis yang diketahui dapat dibuat tepat satu garis sejajar yang diketahui"*.

Gambar 4.5 menunjukkan titik P di luar garis a. Dengan menggunakan mistar melalui titik P dapat dibuat garis-garis yang banyaknya tak hingga. Garis-garis itu semuanya akan memotong garis a kecuali garis b yang sejajar dengan garis a.



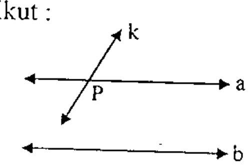
Gb.4.5

Selanjutnya akan dubuktikan kebenaran dari beberapa teorema tentang garis sejajar.

Teorema kesejajaran :

Teorema – 5 : Jika suatu garis memotong salah satu dari dua garis sejajar, maka garis tersebut juga memotong garis yang kedua.

Untuk membuktikan teorema tersebut dibuktikan secara tidak langsung sebagai berikut :



Gb.4.6

Diketahui : garis a sejajar dengan garis b.

Garis k memotong a di titik P.

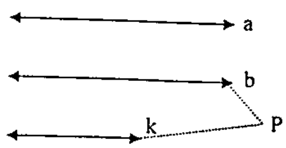
Buktikan : garis k juga memotong garis b.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Andaikan k tidak memotong b	1. Ingkaran dari yang akan dibuktikan.
2. Maka k || b.	2. Jika k dan b tidak berpotongan tentu sejajar.
3. Garis a dan k melalui titik P	3. Diketahui (definisi 5)
4. Jadi melalui titik P terdapat dua garis a dan k yang sejajar dengan garis b.	4. Dari yang diketahui dan akibat pernyataan (2)
5. Hal ini tidak mungkin terjadi (pengandaian salah).	5. Bertentangan dengan aksioma –5
6. Akibatnya garis k tentu memotong b.	6. Ingkaran dari pemisalan bahwa k tidak memotong yang ternyata salah.

Teorema – 6 : Jika garis sejajar dengan salah satu dari dua garis sejajar, maka garis tersebut juga sejajar garis kedua.

Teorema tersebut dapat dibuktikan secara tidak langsung sebagai berikut :



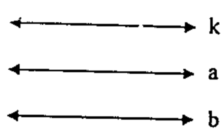
Diketahui : garis a sejajar dengan garis b,
garis k sejajar dengan garis a.
Buktikan : garis k sejajar dengan garis b.

Gb.4.7

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Andaikan k tidak sejajar b	1. Dibuat ingkaran dari yang dibuktikan
2. Maka k berpotongan dengan b, misal di P	2. Jika k tidak sejajar b tentu berpotongan
3. Garis a sejajar b	3. Diketahui
4. Karena a sejajar b, dan k memotong b, maka k memotong a	4. Teorema – 5
5. Hal ini tidak terjadi (pengan-daian salah).	5. Bertentangan dengan yang dike-tahui
6. Akibatnya haruslah k sejajar dengan b.	6. Ingkaran dari pengandaian yang ternyata salah

Teorema – 7 : Jika dua buah garis masing-masing sejajar dengan sebuah garis yang diketahui, maka kedua garis itu sejajar.



Diketahui : garis k, dan garis a || k
garis b || k
Buktikan : garis a || b.

Gb.4.8

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. garis a ‖ k dan k ‖ b 2. Maka a harus sejajar b	1. Diketahui 2. Teorema – 6

C. Hubungan Sudut-sudut pada Dua Garis Sejajar yang Dipotong oleh Sebuah Garis (Transversal)

Pada bagian IV.A.2 telah dibahas sudut yang dibentuk oleh dua garis sejajar yang dipotong oleh sebuah transversal. Hubungan dari sudut-sudut tersebut dinyatakan dalam teorema-teorema berikut ini :

Teorema – 8 : Jika dua garis sejajar a dan b dipotong garis ketiga p, maka :

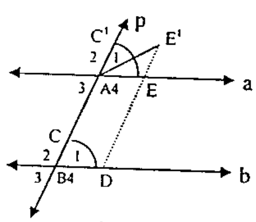
a. sudut-sudut sehadap yang terjadi sama besar.

b. sudut-sudut dalam berseberangan yang terjadi sama besar.

c. sudut-sudut luar berseberangan yang etrjadi sama besar.

Bukti dari teorema tersebut adalah sebagai berikut :

Untuk membuktikan teorema 8a, kita ambil sudut-sudut sehadap $\angle A_1$ dan $\angle B_1$ pada gambar 4.8.



Gb.4.8

Diketahui : garis a ‖ b

Garis p memotong a dan b dititik A dan B.

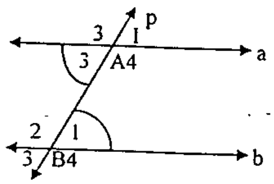
Buktikan : $\angle A_1 = \angle B_1$.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. Andaikan $\angle A_1 \neq \angle B_1$	1. Ingkaran dari yang akan dibuktikan
2. Jika $\angle$ CBD = $\angle B_1$ digeser hingga $C \rightarrow C^1$; $B \rightarrow A$; $D \rightarrow E^1$, maka $\angle B_1 = \angle C^1AE^1$ dan $AE^1 \parallel BD$ atau $AE^1 \parallel b$.	2. Sifat geseran
3. Sehingga dalam A terdapat dua garis a ‖ b dan $AE^1 \parallel b$.	3. Akibat dari yang diketahui dan pernyataan 2.

4. Hal ini tidak mungkin terjadi 5. Jadi haruslah $\angle A_1 = \angle B_1$	4. Bertentangan dengan aksioma – 5 5. Ingkaran dari pengandaian yang ternyata salah.

Untuk membuktikan keberan teorema – 8b kita ambil sudut dalam berseberangan $\angle A_3$ dan $\angle B_1$ pada gambar 4.9.



Gb.4.9

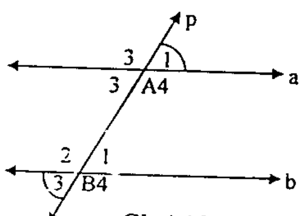
Garis p memotong a dan b di titik A dan B.

Buktikan : $\angle A_3 = \angle B_1$.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. $\angle A_3 = \angle A_1$ 2. $\angle A_1 = \angle B_1$ 3. Maka $\angle A_3 = \angle B_1$	1. $\angle A_3$ dan $\angle A_1$ bertolak belakang 2. Teorema – 8a 3. Akibat pernyataan 1 dan 2 (transitif)

Untuk membuktikan keberan teorema-8c, kita ambil sudut luar berseberangan $\angle A_1$ dan $\angle B_3$ apda gambar 4.10.



Gb.4.10

Diketahui : garis a || b

Garis p memotong a dan b dititik A dan B.

Buktikan : $\angle A_1 = \angle B_3$.

Bukti :

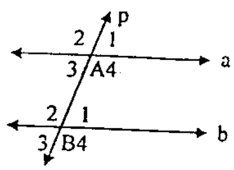
Pernyataan	Alasan
1. $\angle A_1 = \angle A_3$ 2. $\angle A_3 = \angle B_3$ 3. Maka $\angle A_1 = \angle B_3$	1. $\angle A_1$ dan $\angle A_3$ bertolak belakang 2. Teorema – 8a 3. Akibat pernyataan 1 dan 2

Teorema – 9 : Jika dua garis sejajar a dan b dipotong garis ketiga p maka :

a. tiap dua sudut dalam sepihak berjumlah 180°

b. tiap dua sudut luar sepihak berjumlah 180°

Untuk membuktikan kebenaran teorema – 9a kita ambil dua sudut dalam sepihak $\angle A_4$ dan $\angle B_1$.



Gb.4.11

Diketahui : garis a || b

Garis p memotong a dan b dititik A dan B.

Buktikan : $\angle A_4 + \angle B_1 = 180°$.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. $\angle A_1 = \angle B_1$	1. Berdasar teorema 8 (sudut-sudut sehadap sama besar)
2. $\angle A_1 + \angle A_4 = 180°$	2. $\angle A_1$ dan $\angle A_4$ berpelurus
3. Jadi $\angle A_4 + \angle B_1 = 180°$	3. Akibat pernyataan 1 dan 2

Untuk membuktikan keberan teorema – 9b kita ambil dua sudut luar sepihak $\angle A_2$ dan $\angle B_3$. Akan dibuktikan $\angle A_2 + \angle B_3 = 180°$.

Bukti : Perhatikan gambar 4.11.

Pernyataan	Alasan
1. $\angle A_2 = \angle A_4$	1. Sifat sudut bertolak belakang
2. $\angle B_3 = \angle B_1$	2. Sifat sudut bertolak belakang
3. $\angle A_4 + \angle B_1 = 180°$	3. Teorema - 9a
4. Jadi $\angle A_2 + \angle B_3 = 180°$	4. Akibat pernyataan 1,2 dan 3

D. Beberapa Contoh

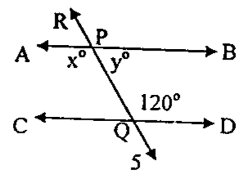
1. Aplikasi numerik dari garis-garis sejajar.

   Contoh 1 :

   Perhatikan gambar garis-garis sejajar di bawah ini.

Tentukan nilai x dan y.

a)



Gb.4.12

Jawab :

AB || CD maka,

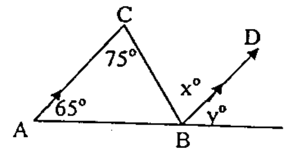
x = 120 (sudut-sudut dalam berse-
berangan besarnya sama)

y + 120 = 180 (dua sudut dalam se-
pihak berjumlah 180°)

$\Leftrightarrow$ y = 60

Jadi nilai-nilai x = 120, y = 60.

b)



Gb.4.13

Jawab :

AC || BD maka,

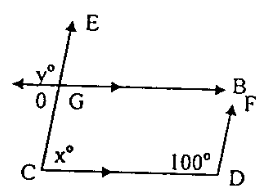
x = 75 (teorema – 8b)

y = 65 (teorema – 8a)

Jadi nilai-nilai

x = 75, y = 65.

c)



Gb.4.14

Jawab :

CE || DF maka

x + 100 = 180 (dua sudut dalam sepihak)

$\Leftrightarrow$ x = 80

AB || CD maka

$\angle$ CGB + x = 180 (dua sudut dalam sepihak)

$\Leftrightarrow \angle$ CGB + 80° = 180°

$\angle$ CGB = y° (dua sudut bertolak belakang)

$\Leftrightarrow$ y = 100

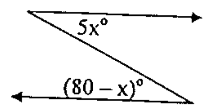
Jadi nilai-nilai x = 80, y = 100.

2. Aplikasi aljabar dari garis-garis sejajar.

Contoh 2 :

Tulislah persamaan yang bersesuaian dari gambar di bawah ini dan gunakanlah persamaan itu untuk menentukan nilai x dan y.

a)



Gb.4.15

Jawab :

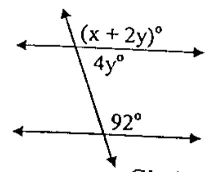
$5x = 80 - x$ (sudut dalam berseberangan)

$\Leftrightarrow 6x = 80$

$\Leftrightarrow x = 15$

Jadi nilai $x = 15$

b)



Gb.4.16

Jawab :

$4y + 92 = 180$ (dua sudut dalam sepihak)

$\Leftrightarrow 4y = 88$

$\Leftrightarrow y = 22$

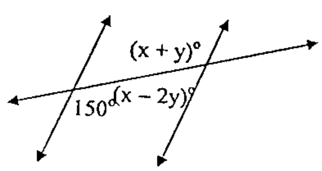
$x + 2y = 92$ (sudut-sudut sehadap)

$\Leftrightarrow x + 44 = 92$

$\Leftrightarrow x = 48$

Jadi nilai-nilai $x = 48$, $y = 22$.

c)



Gb.4.17

Jawab :

$x + y = 150$ (sudut-sudut dalam berseberangan)

$x - 2y = 30$ (sudut-sudut dalam sepihak)

Nilai x dan y dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut :

$$\begin{array}{r} x + y = 150 \\ x - 2y = 30 \\ \hline 3y = 120 \end{array} -$$

$y = 40$

Substitusikan $y = 40$ pada $x + y = 150$

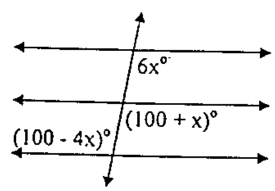
Diperoleh : $x + 40 = 150$

$x = 110$

Jadi nilai $x = 110$, $y = 40$

Contoh 3 :

Mengapa informasi yang diberikan pada gambar di bawah ini salah ?



Gb.4.18

Jawab :

Dari gambar di atas diperoleh persamaan

$6x = 100 + x$ (dua sudut sehadap)

$\Leftrightarrow 5x = 100$

$\Leftrightarrow x = 20$ .... (1)

Juga terdapat persamaan

$100 + x = 180 - 4x$

$5x = 80$

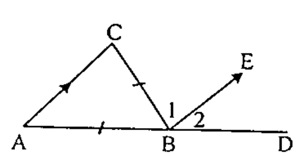
$x = 16$ .... (2)

Dari (1) dan (2) diperoleh nilai x yang berbeda.

Jadi informasi tersebut adalah salah.

3. Pembuktian pada masalah garis-garis sejajar.

Contoh 4 :



Gb.4.19

Diketahui : $AB = BC$

$AC \parallel BE$

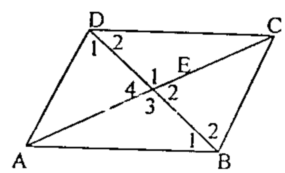
Buktikan : BE membagi dua sama $\angle DBC$

$(\angle B_1 = \angle B_2)$.

Bukti :

Pernyataan	Alasan
1. AC ∥ BE 2. Maka $\angle B_2 = \angle A$ 3. $\angle B_1 = \angle C$ 4. $\angle A = \angle C$ 5. $\angle B_1 = \angle B_2$ atau BE membagi dua sama $\angle DBC$	1. Diketahui 2. Dua sudut sehadap sama, akibat (1) 3. Dua sudut dalam berseberangan sama akibat (1) 4. Karena AB = BC, maka Δ ABC sama kaki 5. Akibat pernyataan (2), (3) dan (4)

Contoh 5 :



Gb.4.20

Diketahui : segiempat ABCD diagonal AC dan BD saling membagi dua sama.

Buktikan : AB ∥ CD,

AD ∥ BC

Bukti :

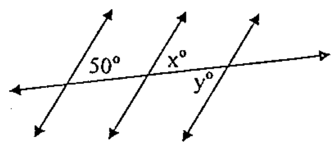
Pernyataan	Alasan
1. AC dan BD saling membagi dua sama	1. Diketahui
2. AE = EC, BE = ED	2. Akibat (1)
3. $\angle E_4 = \angle E_2$, $\angle E_1 = \angle E_3$	3. Sudut bertolak belakang
4. Δ AED kongruen dengan Δ CEB, Δ ABE kongruen dengan Δ CED	4. s. sd. s. dan s. sd. s.
5. $\angle D_2 = \angle B_1$, $\angle D_1 = \angle B_2$	5. Akibat (4)
6. Maka AB ∥ CD, AD ∥ BC	6. Dua garis dipotong oleh garis lain, dengan sudut dalam berseberangan sama, maka dua garis itu sejajar.

Latihan 3 :

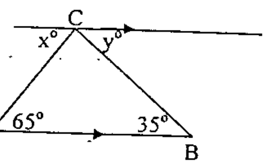
Perhatikan gambar garis-garis sejajar di bawah ini.

Tentukan besar sudut x, y dan z pada soal no.1 – 6.

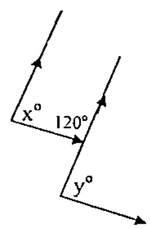
1.



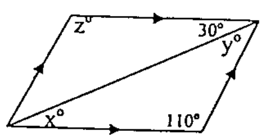
2.



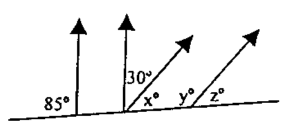
3.



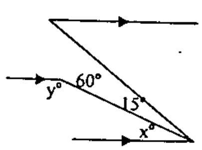
4.



5.

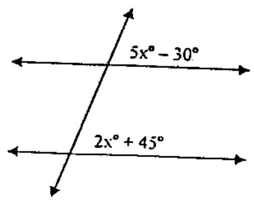


6.

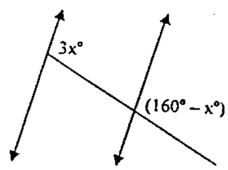


Tulislah persamaan yang bersesuaian dari gambar di bawah ini, kemudian gunakan persamaan itu untuk menentukan nilai x, y (ukuran dalam derajat) soal no.7 – 9.

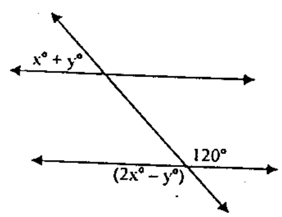
7.



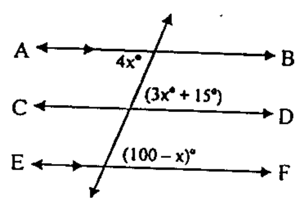
8.



9.

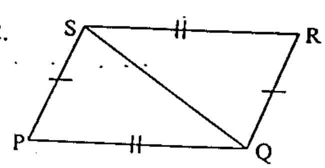


10. Apakah garis AB dan CD pada gambar di bawah ini sejajar? Berilah alasan jawaban Anda.



11. Buktikan bahwa besar suatu sudut luar sebuah segitiga sama dengan jumlah dua sudut dalam yang lainnya.

12.



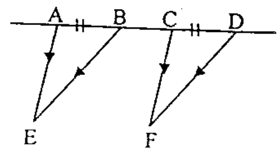
Diketahui : segiempat PQRS

PQ = RS

PS = QR

Buktikan : PQ || RS

PS || QR

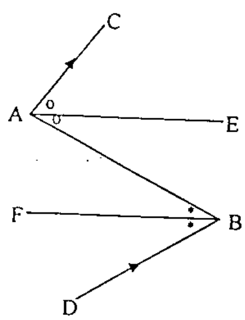
13. 

Diketahui : AB = CD

AE || CF

BE || DF

Buktikan : AE = CF.

14. 

Diketahuia : AC || DB

AE membagi dua sama sudut A

BF membagi dua sama sudut B.

Buktikan : AE || BF.

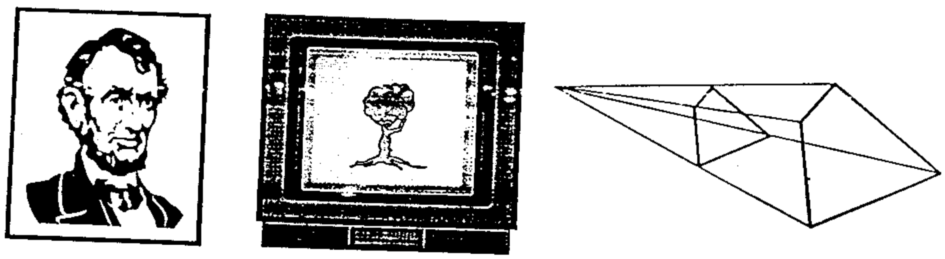
15. Jika garis yang melalui titik sudut B dari segitiga ABC sejajar dengan AC dan membagi dua sama sudut yang terbentuk dari perpanjangan AB. Tunjukkan bahwa segitiga ABC samakaki.

BAGIAN V

KESEBANGUNAN DAN KONGRUENSI

A. Dua Bangun yang Sebangun

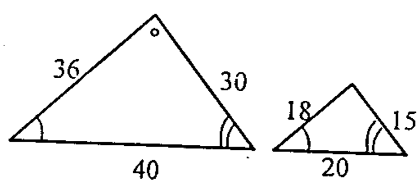
Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai bangun-bangun yang sama bentuknya tetapi berbeda ukurannya; antara lain pasfoto seseorang yang dipasang di kamar tamu dengan pas foto orang yang sama yang dipasang di KTP; gambar sebatang pohon di layar televisi ukuran 14 inchi dengan gambar pohon itu di televisi berukuran 20 inchi. Demikian juga hasil dilatasi suatu bangun dengan bangun asalnya mempunyai bentuk yang sama tetapi ukurannya berbeda.



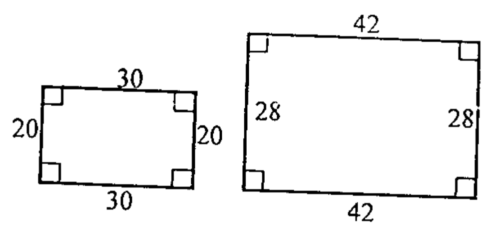
Gb. 5.1

Bangun-bangun yang bentuknya sama tetapi ukurannya berbeda, disebut bangun-bangun yang sebangun.

Perhatikan juga pasangan-pasangan bangun yang sebangun pada Gb.5.2 berikut.



Gb. 5.2a



Gb. 5.2b

Dari contoh gambar bangun-bangun yang sebangun di atas, terlihat bahwa dua buah bangun yang bersisi lurus disebut sebangun jika memenuhi dua syarat berikut :

a. Sudut-sudut yang seletak atau bersesuaian sama besar.

b. Sisi-sisi yang seletak atau bersesuaian panjangnya sebanding; artinya perbandingan panjang sisi-sisi itu sama.

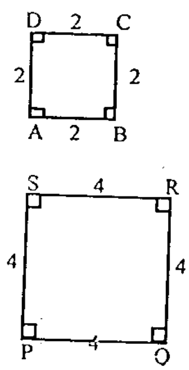
Untuk lebih memahami pengertian dua bangun yang sebangun perhatikan contoh berikut.

Contoh 1 :

Apakah setiap dua persegi pasti sebangun ?

Jawab :

Perhatikan persegi ABCD dan PQRS.



Gb.5.3

(i) sudut-sudutnya yang seletak sama, yaitu masing-masing 90°.

(ii) sisi-sisinya yang seletak sebanding.

AB : PQ = 2 : 4 = 1 : 2

BC : QR = 2 : 4 = 1 : 2

CD : RS = 2 : 4 = 1 : 2

AD : PS = 2 : 4 = 1 : 2

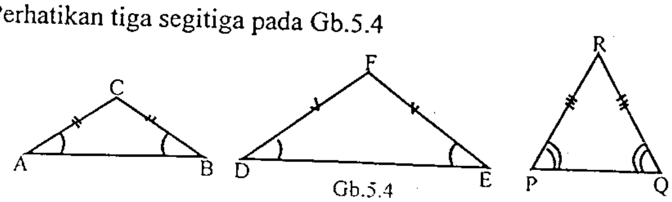
Karena AB : PQ = BC : QR = CD : RS = AD : PS, jadi kedua persegi itu sebangun. Selanjutnya, dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa setiap dua persegi pasti sebangun.

Contoh 2 :

Apakah setiap dua segitiga samakaki pasti sebangun ?

Jawab :

Perhatikan tiga segitiga pada Gb.5.4



Gb.5.4

Ketiga buah segitiga itu masing-masing berupa segitiga samakaki.

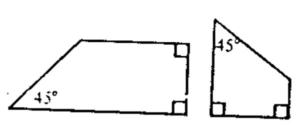
Δ ABC dan Δ DEF sudut-sudutnya yang bersesuaian sama; jadi Δ ABC dan Δ DEF sebangun. Sedang Δ ABC dan Δ PQR tidak sebangun, karena sudut-sudutnya yang bersesuaian, antara lain sudut-sudut puncaknya, yaitu $\angle$ C dan $\angle$ R tidak sama besarnya.

Cobalah Anda jawab soal-soal latihan berikut.

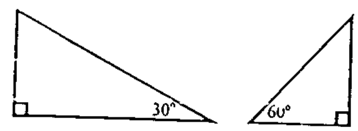
Latihan 4

1. Pada gambar berikut, manakah pasangan bangun yang mungkin sebangun, pasti sebangun atau pasti tidak sebangun ?

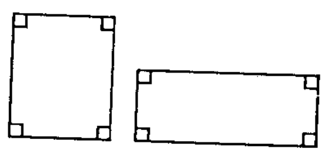
a.



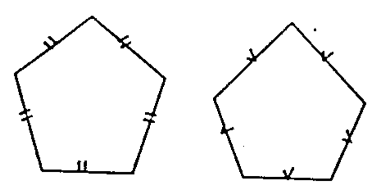
b.



c.



d.



2. Dua buah persegipanjang masing-masing berukuran 72 cm × 48 cm dan 15 cm × 10 cm. Jelaskan apakah kedua persegipanjang itu sebangun ?
3. Dua buah belah ketupat keduanya memiliki sudut lancip yang besarnya 60°. Jelaskan apakah kedua belah ketupat itu sebangun ?
4. Sebuah bingkai pigura ukuran bagian luarnya 75 cm × 45 cm. Jika bagian dalam dari pigura itu sebangun dengan bagian luar, sedang lebar bingkai bagian dalamnya 36 cm, hitunglah panjang dari bingkai bagian dalamnya.
5. Dapatkah ditentukan mana diantara bangun-bangun berikut yang sebangun ?
   a. dua segitiga
   b. dua trapesium
   c. dua jajargenjang
   d. dua persegi
   e. dua segienam beraturan

B. Kesebangunan Dua Segitiga

Segitiga merupakan bangun yang sangat penting dalam keseluruhan pembahasan tentang geometri. Banyak sekali persoalan tentang bangun-bangun lain di luar segitiga yang pemecahannya menjadi lebih mudah dengan bantuan teorema-teorema tertentu tentang segitiga. Sehubungan dengan itu maka kesebangunan dua segitiga juga merupakan topik pembahasan yang penting.

Definisi :

Dua segitiga dikatakan sebangun jika kedua segitiga itu berkorespondensi dan sudut-sudut bersesuaian sama besarnya atau panjang sisi-sisinya yang bersesuaian sebanding.

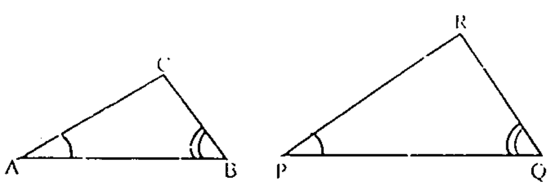
Δ ABC yang sebangun dengan Δ PQR dilambangkan dengan : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

Dengan demikian, syarat untuk kesebangunan dua segitiga adalah :

(i) sisi-sisi yang bersesuaian panjangnya sebanding ; atau

(ii) sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Jadi syarat agar $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ adalah:



Gb.5.5

(i) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$

atau

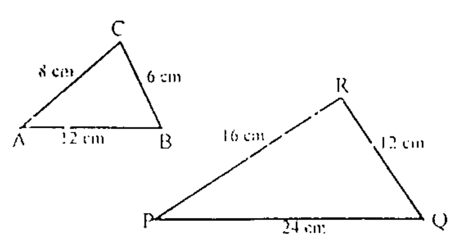
(ii) $\angle A = \angle P$

$\angle B = \angle Q$

$\angle C = \angle R$

(Gambar 5.5)

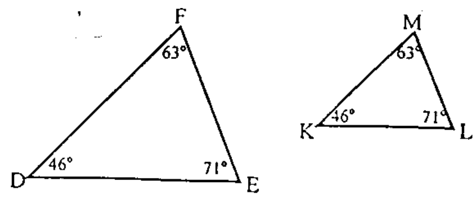
Perhatikan contoh pada Gambar 5.6 berikut.



a. Bandingkan Δ ABC dan Δ PQR : sisi-sisi yang bersesuaian panjangnya sebanding:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = \frac{1}{2}$$

Jadi $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



Gb.5.6

b. Bandingkan Δ DEF dan Δ KLM ; sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

$\angle D = \angle K$; $\angle E = \angle L$; $\angle F = \angle M$

Jadi $\Delta DEF \sim \Delta KLM$.

Untuk menentukan sisi-sisi dan sudut-sudut yang bersesuaian dapat dilakukan sebagai berikut:

(i) sisi dengan ukuran terpanjang bersesuaian dengan sisi terpanjang pada segitiga yang lain, yang sedang dengan yang sedang, dan yang terpendek dengan yang terpendek.

(ii) Pasangan sudut yang bersesuaian terletak dihadapan sisi yang bersesuaian.

Cobalah Anda jawab soal-soal latihan berikut:

<u>Latihan 5</u>

1. Tentang Δ ABC dan Δ DEF diketahui $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$. $\angle D = 45°$ dan $\angle F = 60°$.
   a. Jelaskan apakah Δ ABC dan Δ DEF sebangun ?
   b. Sebutkan pasangan-pasangan sisi bersesuaiannya, yang panjangnya sebanding.

2. Diketahui Δ PQR dan Δ KLM ; PQ = 8 cm , QR = 10 cm, PR = 12 cm, KL = 4 cm ; KM = 6 cm dan LM = 5 cm.
   a. Apakah Δ PQR dan Δ KLM sebangun, jelaskan !
   b. Sebutkan pasangan-pasangan sudut yang sama besarnya.

3. Dalam Δ ABC dan Δ XYZ diketahui bahwa $\angle A = 97°$; $\angle B = 33°$; $\angle Z = 50°$ dan $\angle X = 97°$.
   a. Jelaskan apakah Δ ABC dan ΔXYZ sebangun ?
   b. Tuliskan pasangan sisi-sisi bersesuaiannya.

4. Segitiga yang sebangun dengan segitiga yang ukuran sisi-sisinya 6 cm, 9 cm dan 13 cm adalah segitiga yang panjang sisi-sisinya:

   a. $3\,\text{cm},\ 4\frac{1}{2}\,\text{cm}$ dan $6\frac{1}{2}\,\text{cm}$

   b. 18 cm , 27 cm dan 40 cm

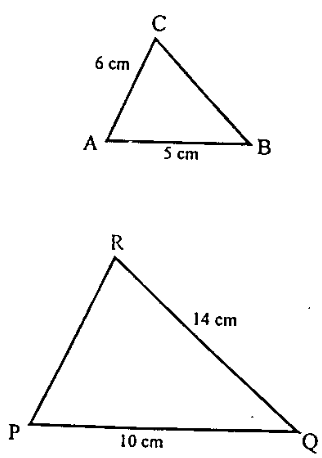
   c. 12 cm , 18 cm dan 26 cm

5. Dalam Δ ABC yang lancip dilukis garis tinggi-garis tinggi AD , BE dan CF yang ketiganya saling berpotongan dititik T. Sebutkan semua pasangan segitiga sebangun yang terjadi.

C. Perhitungan Panjang Sisi pada Segitiga Sebangun.

Dengan memperhatikan syarat-syarat kesebangunan dua segitiga, maka kita dapat menentukan panjang sisi tertentu dari suatu segitiga yang telah diketahui sebangun dengan sebuah segitiga lain yang diketahui.

Contoh:



Gb.5.7

Diketahui: $\Delta\ ABC \sim \Delta\ PQR$.

AB = 5 cm, AC = 6 cm, PQ = 10 cm dan QR = 14 cm.

Hitung : BC dan PR.

Jawab : $\Delta\ ABC \sim \Delta\ PQR$ maka sisi-sisi yang letaknya bersesuaian panjangnya sebanding:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

Akibatnya:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{BC}{14}$$

$$BC = \frac{5}{10} \times 14$$

$$BC = 7$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{6}{PR}$$

$$5\ PR = 6 \times 10$$

$$PR = \frac{60}{5}$$

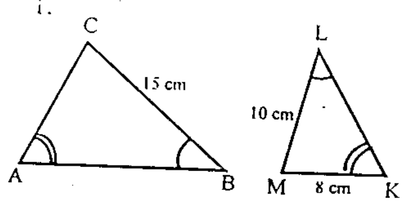
$$PR = 12$$

Jadi BC = 7 cm dan PR = 12 cm.

Cobalah Anda jawab soal-soal latihan berikut:

Latihan 6

1.

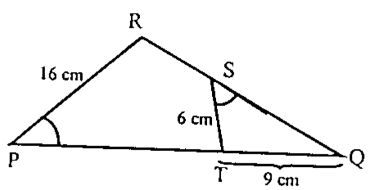


Pada gambar di samping diketahui Δ ABC dan Δ KLM.

BC = 15 cm, LM = 10 cm dan MK = 8 cm.

Hitung : AC

2.



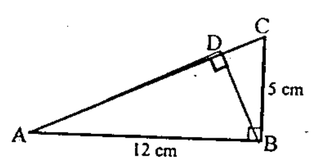
Pada Gambar di samping diketahui

$\angle$ RPQ = $\angle$ QST ; PR = 16 cm, QT = 9 cm dan ST = 6 cm.

a. Buktikan Δ PQR ~ Δ SQT.

b. Hitung : QR.

3.



Pada gambar di samping Δ ABC yang siku-siku di titik sudut B.

AB = 12 cm, BC = 5 cm dan $\angle$ BDA = 90°

a. Buktikan Δ BDC ~ Δ ABC

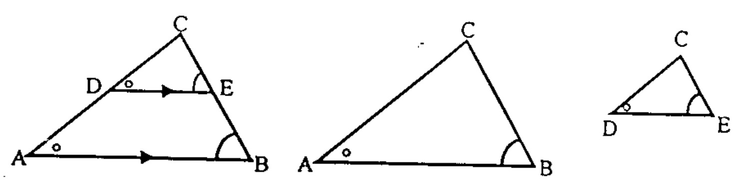
b. Hitung : panjang BD

4. Dalam Δ ABC, garis tinggi-garis tinggi AD dan BE berpotongan di titik T. Buktikan bahwa: $TA \times TD = TB \times TE$

5. Dalam trapesium ABCD dengan sisi sejajar AB dan DC, diagonal-diagonalnya AC dan BD berpotongan di titik T. Buktikan bahwa: $TA \times TD = TB \times TC$.

D. Kesebangunan Segitiga dan Perbandingan Ruas-ruas Garis Sejajar pada Segitiga.

Jika dalam sebuah segitiga dilukis garis yang sejajar salah satu sisinya dan memotong kedua sisinya yang lain, akan terbentuk pasangan-pasangan ruas garis yang panjangnya membentuk perbandingan senilai. Hal ini dapat dijelaskan dengan kesebangunan segitiga ; karena jika sebuah segitiga dipotong oleh sebuah garis yang sejajar dengan salah satu sisinya maka akan terjadi dua segitiga yang sebangun. Perhatikan Gb. 5.8.



Gb.5.8

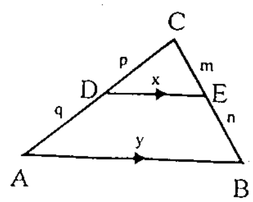
Oleh sebuah garis yang sejajar sisi AB dan memotong sisi-sisi AC dan BC dititik D dan E terjadilah dua segitiga sebangun yaitu Δ ABC dan Δ DEC.

Karena Δ DEC ~ Δ ABC, maka berlaku:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

Jika CD = p	CE = m	DE = x
DA = q	EB = n	AB = y

Maka berarti (perhatikan Gb. 5.8)



Gb.5.9

$$\frac{p}{p+q} = \frac{m}{m+n} = \frac{x}{y}$$

Akibatnya:

$$\frac{p}{p+q} = \frac{m}{m+n}$$

$$p(m+n) = m(p+q)$$

$$mp + np = mp + mq$$

$$np = mq$$

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$$

Jadi pada sebuah segitiga yang dipotong oleh sebuah garis yang sejajar salah satu sisinya seperti pada Gb. 5.9, berlaku:

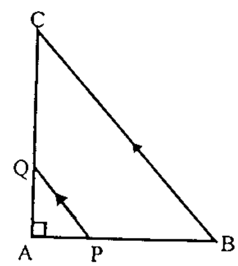
$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{p}{q} = \dfrac{m}{n} \\[2ex] \dfrac{x}{y} = \dfrac{p}{p+q} \quad \text{atau} \quad \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{m+n} \end{array}}$$

Sifat ini akan sangat membantu dalam perhitungan panjang ruas-ruas garis sejajar pada segitiga atau bangun lainnya.

<u>Contoh</u>:

Dalam Δ ABC yang siku-siku dititik sudut A, diketahui AB = 6 cm dan AC = 8 cm. Titik P terletak pada sisi AB. Jika Q pada sisi AC, sehingga PQ sejajar BC dan AP = 2 cm ; hitunglah panjang CQ dan PQ. (Perhatikan Gb. 5.10).

Jawab:



Gb.5.10

PQ // BC, maka $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

$AP = 2$

$PB = (6 - 2) = 4$

$AQ = AC - QC = 8 - QC$

$\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$

$\frac{8 - QC}{QC} = \frac{2}{4}$

$\frac{8 - QC}{QC} = \frac{1}{2}$

$16 - 2QC = QC$

$3QC = 16$

$QC = 5\frac{1}{3}$

Jadi $CQ = 5\frac{1}{3}$ cm

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$

$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow \frac{PQ}{10} = \frac{2}{6}$

$\frac{PQ}{10} = \frac{1}{3}$

$PQ = \frac{1}{3} \times 10$

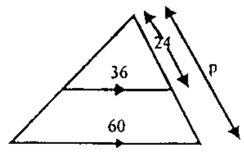
$PQ = 3\frac{1}{3}$

Jadi $PQ = 3\frac{1}{3}$ cm

Cobalah Anda jawab soal-soal latihan berikut :

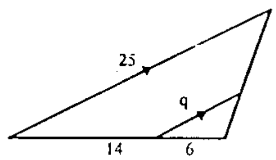
Latihan 7

1.



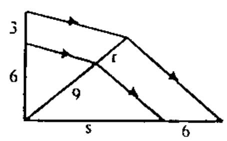
Jelaskan bagaimana menentukan nilai p pada gambar disamping.

2.



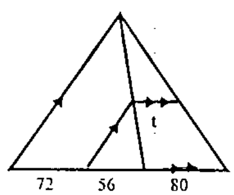
Jelaskan bagaimana menentukan nilai q pada gambar disamping.

3.



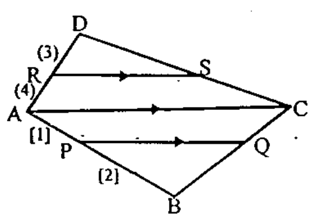
Jelaskan bagaimana menentukan nilai r dan s pada gambar disamping.

4.



Jelaskan bagaimana menentukan nilai t pada gambar disamping.

5.



Pada gambar disamping diketahui bahwa PQ // AB dan RS // AB.

DR : RA = 3 : 4

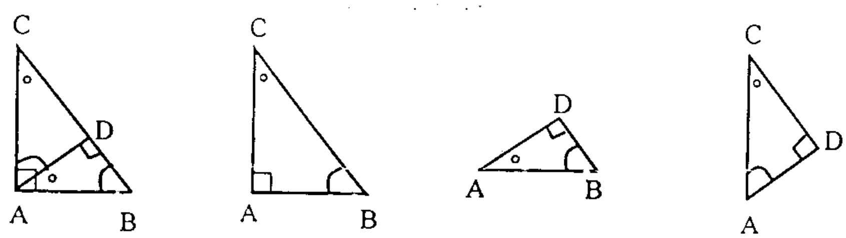
AP : PB = 1 : 2

Jelaskan bagaimana menentukan nilai dari perbandingan $\frac{PQ}{RS}$.

E. Garis Tinggi pada Sisi Miring dalam Sebuah Segitiga Siku-siku.

Jika dalam sebuah segitiga siku-siku dilukis garis tinggi pada sisi miringnya, maka terjadi pasangan ruas-ruas garis yang panjangnya membentuk perbandingan seharga. Hal itu karena garis tinggi ke sisimiring menciptakan tiga segitiga-segitiga yang sebangun.

Perhatikan Gb. 5.11.



Gb.5.11

Oleh garis tinggi AD, segtiga siku-siku ABC terbagi menjadi dua segitiga yang sebangun yaitu Δ ABD dan Δ CAD. Dengan demikian terdapat tiga segitiga sebangun, yaitu Δ ABD, Δ CAD dan Δ ABC sendiri.

Dengan membuat pasangan-pasangan segitiga dari tiga segitiga sebangun tersebut kita dapat menurunkan beberapa rumus berikut.

a. $\Delta ABD \sim \Delta CBA$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\mathbf{AB^2 = BD \times BC}$$

b. $\Delta ACD \sim \Delta ABC$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$$

$$\mathbf{AC^2 = CD \times CB}$$

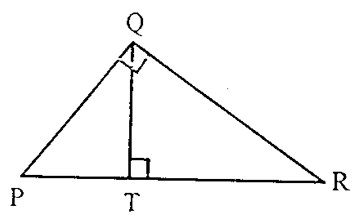
c. $\Delta ABD \sim \Delta CAD$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$$

$$AD^2 = BD \times CD$$

Dengan rumus-rumus diatas kita dapat memperoleh kemudahan dalam perhitungan yang melibatkan sebuah segitiga siku-siku dan garis tinggi pada sisi miringnya.

Contoh:



Gb.5.12

Dalam Δ PQR yang siku-siku dititik Q dengan garistinggi QT, diketahui bahwa PT = 8 cm dan RT = 12 cm. Jelaskan bagaimana menentukan panjang.

a. PQ b. QR

Jawab:

PT = 8 cm, RT = 12 cm

maka PR = (8 + 12) cm

PR = 20 cm

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PT \times PR \\ &= 8 \times 20 \\ &= 160 \\ PQ &= \sqrt{160} \\ &= 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

; jadi panjang PQ = $4\sqrt{10}$ cm

$$\begin{aligned} QR^2 &= RT \times RP \\ &= 12 \times 20 \\ &= 240 \\ QR &= \sqrt{240} \\ &= 4\sqrt{15} \end{aligned}$$

; jadi panjang QR = $4\sqrt{15}$ cm

Cobalah Anda kerjakan soal-soal latihan berikut.

Latihan 8

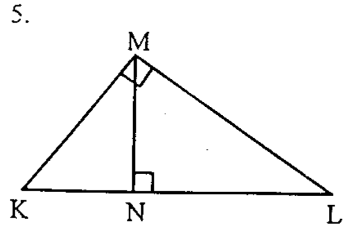
1. Dalam Δ ABC diketahui $\angle$ A = 90 dan AD adalah garis tinggi. Jika diketahui bahwa BC = 8 cm dan BD = 4 cm, hitunglah.
   a. panjang AB
   b. panjang AD

2. Dalam Δ DEF yang siku-siku di titik D, DT adalah garis tinggi. Jika diketahui DT = 12 cm dan FT = 16 cm, hitunglah.
   a. panjang ET
   b. panjang DF

3. Dalam Δ PQR yang siku-siku dititik P, diketahui bahwa PS adalah garistinggi. Jika diketahui bahwa luas Δ PQS = 48 cm^2 dan QS = 8 cm, hitunglah.
   a. panjang PS
   b. panjang RS
   c. panjang PR

4. Dalam Δ ABC yang siku-siku dititik A dilukis garistinggi AD. Jika AC dan AB = 40 cm, hitunglah panjang AD.

5.



Pada gambar di samping diketahui bahwa KM = 30 cm dan MN = 24 cm.

Hitung:

a. panjang ML

b. panjang KL

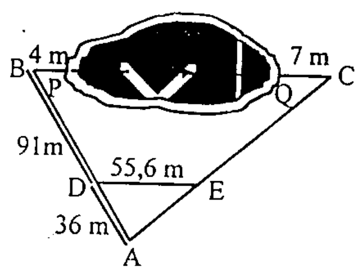
F. Penggunaan Sifat Kesebangunan Dua Segitiga

Sifat kesebangunan banyak sekali digunakan dalam pemecahan masalah sehari-hari, khususnya dalam masalah pengukuran jarak atau tinggi *yang tidak dapat dilakukan dengan cara pengukuran langsung* ; antara lain

(a) pengukuran jarak antara dua tempat atau dua titik yang terhalang oleh bangunan, sungai atau kolam.

(b) Pengukuran tinggi bangunan atau pohon yang puncaknya sulit dijangkau. (Jika dalam perhitungan melibatkan panjang bayangan oleh penyinaran dengan sinar matahari, maka *arah berkas sinar matahari itu dianggap sejajar*, karena letak sumbernya dianggap jauh tak berhingga. Hal ini perlu dijelaskan kepada siswa, dalam proses pembelajarannya).

Contoh:



Gb. 5.13

Untuk mengukur lebar kolam air di bagian antara titik P dan Q seperti pada Gambar 4.13, maka dengan alat tertentu dapat ditetapkan titik-titik A, B, C, D dan E sedemikian rupa sehingga AD, DB, BE, BP dan CQ dapat diukur dan DE sejajar dengan BC.

Misal hasil pengukuran menunjukkan bahwa AD = 36 m, DB = 91 m, DE = 55,6 m, BP = 4 m dan CQ = 7 m ; maka lebar PQ dapat diperhitungkan sebagai bagian dari ruas garis BC. Untuk menghitung panjang BC, maka dibandingkan Δ ABC dan Δ ADE. Karena DE sejajar BC (dibuat), maka:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

$$BC = \frac{AB}{AD} \times DE$$

$$= \frac{(36+91) \times 55{,}6}{36}$$

$$= \frac{127 \times 55{,}6}{36}$$

$$= 196{,}24$$

PQ = BC – BP – QC

PQ = 196,24 – 4 – 7

PQ = 185,24

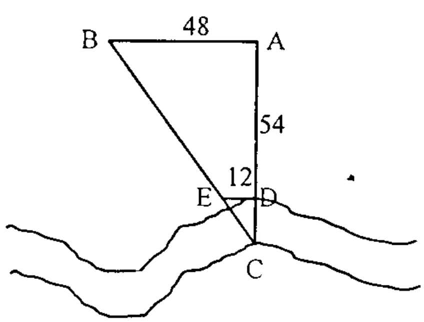
Jadi lebar kolam air dibagian antara P dan Q sama dengan 185,24 m

Cobalah Anda kerjakan soa-soal latihan berikut.

<u>Latihan 9</u>

1. Dalam usaha menentukan tinggi pohon dihalaman sekolah, dilakukan dengan pertolongan sebuah tongkat lurus sepanjang 144 cm. Kegiatan pengukuran dilakukan siang hari pada saat matahari bersinar terang. Tongkat diletakkan tegak lurus permukaan tanah disekitar bayangan dari pohon yang akan diukur tingginya.

   Jika kenyataan hasil pengukuran menunjukkan bahwa panjang bayangan pohon itu ternyata 5,4 m, sedang panjang bayangan tongkatnya 96 cm ; berapa meter tinggi pohon tersebut ?

2. 

   Pada kegiatan pengukuran lebar sungai dilakukan dengan menciptakan gambar dilokasi pengukuran seperti disamping. Jika bilangan-bilangan itu menyatakan panjang dalam satuan meter ; hitunglah lebar sungai di bagian antara titik C dan titik D.

3. Sebuah pohon di siang hari yang cerah mempunyai bayangan sepanjang 24 m, sedang pada saat yang sama sebuah tiang yang tingginya 3 m mempunyai bayangan yang panjangnya 2,4 m. Jelaskan bagaimana menentukan tinggi pohon yang sebenarnya.

4. Pada sehelai kertas berwarna berbentuk persegipanjang, yang berukuran 30 cm x 40 cm diletakkan sehelai gambar hiasan berbentuk persegi panjang yang sebangun dengan bentuk tepi kertas berwarna itu. Di sebelah atas, kiri dan kanan dari gambar hiasan itu ternyata masih terdapat bagian kertas berwarna masing-masing selebar 3 cm. Berapakah lebar bagian kertas berwarna yang terletak di bagian bawah yang tidak tertutup oleh gambar hiasan itu.

5.

Dua batang pohon x dan y terletak di sebelah-menyebelah dari sebuah bangunan yang mempunyai halaman yang cukup luas.

Jelaskan langkah yang dapat dilaksanakan untuk menentukan jarak antara kedua batang pohon yang terhalang oleh bangunan B tersebut. dalam bentuk model matematika yang mendasarkan pada sifat-sifat kesebangunan segitiga.

G. Bangun-bangun yang Kongruen

Kongruen adalah salah satu jenis relasi atau hubungan antara dua bangun. Dua bangun dikatakan kongruen jika sama bentuknya dan sama ukurannya. Dengan demikian kata "kongruen" dapat dikenakan untuk dua ruas garis, dua sudut, dua segitiga dan pasangan bangun-bangun geometri yang lain.

Dalam kehidupan manusia dewasa ini, banyak sekali dilibatkan benda-benda yang kongruen, khususnya bagian-bagian dari suatu peralatan rumah tangga dan mesin (seperti sekerup), ubin, lampu dan sebagainya. Dengan menggunakan benda-benda yang kongruen manusia mendapatkan kemudahan dalam memenuhi keperluan hidupnya. Dengan perkataan lain kongruensi atau kekongruenan sebenarnya adalah sesuatu yang sangat akrab dengan kehidupan manusia dewasa ini.

Pada dua bangun yang kongruen, khususnya bangun datar, maka :

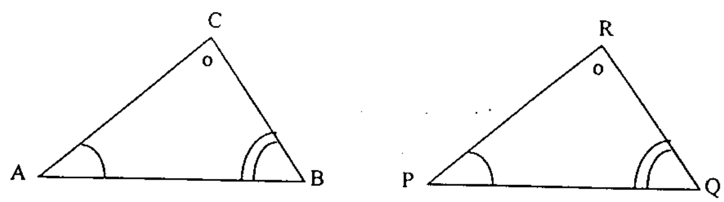
(i) Unsur-unsurnya yang bersesuaian sama

(ii) Luas daerahnya sama.

H. Dua Segitiga Kongruen dan Penggunaannya.

Definisi : Dua segitiga dikatakan kongruen jika sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang dan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Pada Gb.5.14 Δ ABC dan Δ PQR kongruen dan dilambangkan dengan Δ ABC $\cong$ Δ PQR, maka



Gb.5.14

(i)	PQ = AB	(ii)	$\angle$ P = $\angle$ A
	QR = BC		$\angle$ Q = $\angle$ B
	RP = CA		$\angle$ R = $\angle$ C

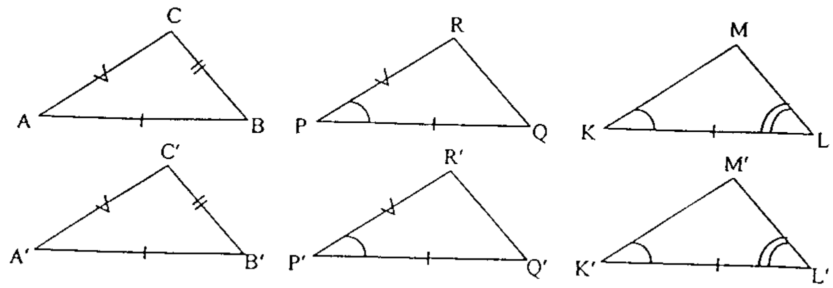
Meskipun demikian untuk memastikan apakah dua segitiga itu kongruen tidak perlu kita harus memeriksa kekongruenan ketiga sisinya dan ketiga sudutnya. Atau semua unsurnya. Untuk memastikan kekongruenan dua segitiga kita cukup menetapkan kekongruenan dari tiga unsur-unsurnya tertentu, yang dijelaskan dalam syarat-syarat kekongruenan dua segitiga.

Syarat-syarat kekongruenan dua segitiga :

Dua segitiga kongruen jika

1. Sisi-sisinya yang bersesuaian sama panjang (sisi, sisi, sisi)
2. Dua sisinya yang bersesuaian sama panjang dan sudut-sudut yang diapitnya sama besar (sisi, sudut, sisi)
3. Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi yang terletak diantara dua sudut itu sama panjang (sudut, sisi, sudut).

Perhatikan Gb.5.15, berikut :



Δ A'B'C' ≅ Δ ABC (sisi, sisi, sisi)

Δ P'Q'R' ≅ Δ PQR (sisi, sudut, sisi)

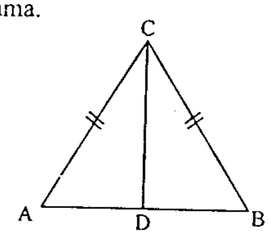
Δ K'L'M' ≅ ΔKLM (sudut. sisi, sudut)

Gb.5.15

Sifat kekongruenan dua segitiga terutama digunakan untuk menunjukkan atau membuktikan kesamaan atau kekongruenan dari dua ruas garis, atau dua sudut atau mungkin juga luas dari dua daerah tertentu.

Dalam pembuktian ini, maka ruas-ruas garis atau sudut-sudut yang akan ditunjukkan kesamaannya dipandang sebagai salah satu unsur dari dua segitiga yang kongruen.

Contoh 1. Dalam sebuah segitiga samakaki, buktikan bahwa kedua sudut alasnya sama.



Gb.5.16

Diketahui : Δ ABC; AC = BC

Dibuktikan : ∠ A = ∠ B

Bukti : Perhatikan gambar di samping.

Diusahakan agar ∠ A dan ∠ B masing-masing merupakan salah satu sudut dari dua segitiga. Untuk itu dibuat garis berat CD dari titik puncak C, sehingga terjadi dua buah segitiga, yaitu Δ ADC dan Δ BDC.

Bandingkan Δ ADC dan Δ BDC

AC = BC (diketahui)

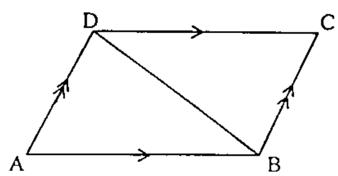
CD = CD (berimpit)

AD = BD (dibuat)

Maka ADC ≅ Δ BDC (sisi, sisi, sisi)

Akibatnya : ∠ A = ∠ B (sudut-sudut yang bersesuaian).

Contoh 2. Dalam sebuah jajargenjang kedua sisi yang berhadapan sama panjang. Buktikan!



Gb.4.17

Diketahui : jajargenjang ABCD

Dibuktikan : AB = DC

AD = BC

Bukti : yang harus dibuktikan adalah kesamaan dua ruas garis.

Letakkan ruas-ruas garis AB dan DC pada dua segitiga yang berbeda, dengan cara menarik diagonal BD, sehingga terjadi Δ ABD dan Δ CDB.

Bandingkan Δ ABD dan Δ CDB

AB || DC (definisi jajargenjang), akibatnya : ∠ ABD = ∠ CDB (Sudut dalam berseberangan).

AD || BC (definisi jajargenjang), akibatnya : ∠ ADB = ∠ CBD (Sudut dalam berseberangan).

BD = BD (sekutu).

Maka Δ ABD ≅ Δ CDB (sudut, sisi, sudut)

Akibatnya :

AB = DC (sisi-sisi yang bersesuaian)

AD = BC (sisi-sisi yang bersesuaian)

Latihan 10

1. Dalam Δ PQR yang samakaki dengan titik puncak R, pada perpanjangan PQ diettapkan titik A dan pada perpanjangan QP ditetapkan titik B sedemikian sehingga PB = QA. Buktikan bahwa ∠ PCB = ∠ QCA dan CB = CA.
2. Dalam sebuah segitiga samakaki garis-garis tinggi ke kaki-kakinya sama panjang. Buktikan!
3. Diketahui Δ ABC sembarang. Kearah luar dari segitiga ini dilukis segitiga samasisi ACQ dan segitiga samasisi BCP. Selidiki apakah AP = BQ. kemudian buktikan jawaban Anda.

4. Dalam sebuah belah ketupat :
   a. kedua diagonalnya saling tegak lurus
   b. setiap diagonal membagi dua sama besar sudut yang dilaluinya.

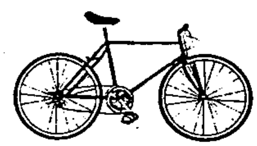
   Buktikan!

5. Dalam jajargenjang ABCD melalui titik sudut B ditarik garis BP yang tegak lurus pada diagonal AC (titik P pada AC), dan garis DQ yang tegak lurus diagonal AC (titik Q pada AC). Buktikan bahwa :
   a. AQ = BP
   b. BP = DQ

BAGIAN VI
LINGKARAN

Banyak dijumpai disekitar kita benda-benda atau bagian dari benda yang berbentuk lingkaran.

Mobil



Sepeda

Gb.7.1

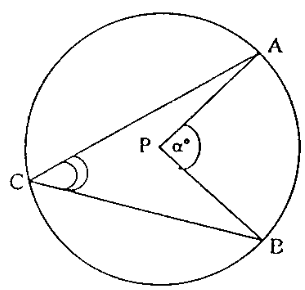
Lebih-lebih untuk benda-benda yang berputar biasanya digunakan bentuk lingkaran. Misalnya roda gigi mesin. roda berbagai jenis kendaraan. Cobalah Anda bayangkan apa yang akan terjadi jika roda kendaraan tidak berbentuk lingkaran. Dengan dipilihnya roda berbentuk lingkaran maka akan dapat mempercepat jalannya kendaraan, menambah kenyamanan dalam kendaraan. Contoh tersebut menunjukkan kegunaan dari lingkaran yang sangat berfaedah membantu kebutuhan manusia.

Dalam kurikulum matematika SLTP terdapat pokok bahasan tentang lingkaran yang meliputi pengertian lingkaran, unsur-unsur lingkaran, keliling dan luas lingkaran, hubungan sudut dalam lingkaran, garis singgung pada lingkarandan lingkaran dalam serta lingkaran luar segitiga. Namun pada paket ini akan dibahas hanya beberapa diantaranya hubungan lingkaran, lingkaran dalam, dan lingkaran luar segitiga.

A. Hubungan Antara Sudut pada Lingkaran.

Sebelum membahas hubungan antara sudut pada lingkaran perlu diingat kembali pengertian-pengertian tentang : sudut pusat, sudut keliling, sudut dalam lingkaran dan sudut luar lingkaran.

1. Sudut Pusat dan Sudut Keliling Lingkaran.



Gb.7.2

Gambar 7.2 menunjukkan sebuah lingkaran dengan pusat P. Sudut yang titik sudutnya adalah titik pusat lingkaran dan kaki-kaki sudutnya adalah jari-jari lingkaran tersebut dinamakan ***sudut pusat lingkaran.***

Pada gambar 7.2 ∠ APB disebut sudut pusat. Jika ∠ APB = α°, maka panjang busur AB juga sama dengan α° (derajat busur).

Jadi besarnya sudut pusat sama dengan ukuran panjang busur (dalam derajat busur) diantara kaki-kaki sudutnya.

Akibatnya ada dua sudut pusat yaitu yang menghadap busur besar dan busur kecil. Untuk sudut pusat yang lebih dari 180° disebut sudut refleks dari sudut pusat lingkaran tersebut.

Catatan :

Apabila tidak ada keterangan khusus maka yang dimaksud sudut pusat APB adalah sudut pusat yang menghadap busur kecil AB.

Sudut yang titik sudutnya pada busur lingkaran, sedangkan kaki-kaki sudutnya adalah tali busur-tali busur lingkaran tersebut, dinamakan ***sudut keliling lingkaran***. Sudut ACB disebut ***sudut keliling lingkaran***.

Hubungan antara besarnya sudut pusat dan sudut lingkaran yang menghadap busur yang sama dapat dijelaskan sebagai berikut.

Gb.7.3

Masing-masing segitiga APB, BPC dan APC adalah segitiga samakaki (kaki-kakinya adalah jari-jari lingkaran tersebut).

$\angle P_1 + \angle P_3 = 360^\circ - \angle P_2$ .... (i)

Dalam Δ BPC :

$\angle P_1 = 180^\circ - (\angle B_1 + \angle C_2)$

$= 180^\circ - 2.\angle C_2$ (karena $\angle B_1 = \angle C_2$)

Dalam Δ APC :

$\angle P_3 = 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1)$

$= 180^\circ - 2.\angle C_1$ (karena $\angle C_1 = \angle A_1$)

$\angle P_1 + \angle P_3 = (180^\circ - 2\angle C_2) + (180^\circ - 2\angle C_1)$

$= 360^\circ - 2(\angle C_2 + \angle C_1)$

$= 360^\circ - 2\angle C$ .... (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh :

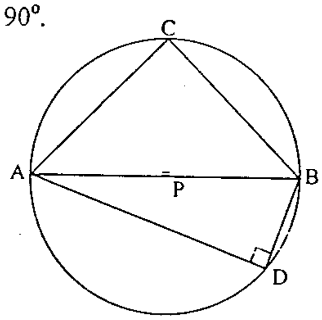
$360^\circ - \angle P_2 = 360^\circ - 2\angle C = 2(180^\circ - \angle C)$

Sehingga $\angle P_2 = 2 \angle C$

Jadi :

Dalam sebuah lingkaran besar sudut keliling sama dengan setengah kali besar sudut pusat yang menghadapi busur yang sama.

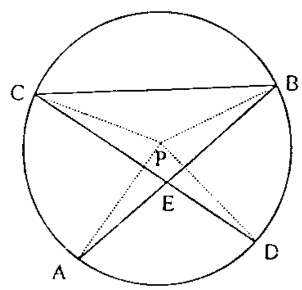
Akibatnya sudut keliling yang berdiri pada sebuah garis tengah suatu lingkaran besarnya adalah 90°.



Gb.7.4

2. Sudut antara Dua Talibusur : Sudut dalam Keliling Lingkaran dan Sudut Luar Keliling Lingkaran.

Dua talibusur sebuah lingkaran dapat berpotongan di dalam lingkaran atau perpanjangannya berpotongan di luar lingkaran.



Gb.7.5

Gambar 7.5 menunjukkan suatu lingkaran dengan pusat P, dengan dua talibusur AB dan CD yang berpotongan di E di dalam lingkaran tersebut. Sehingga terbentuk sudut-sudut : ∠ AED, ∠ DEB, ∠ BEC dan ∠ ACE. Sudut-sudut tersebut disebut sudut dalam keliling lingkaran atau sudut keliling dalam.

Besarnya sudut dalam keliling lingkaran dapat dihitung sebagai berikut.

∠ AEC = ∠ EBC + ∠ ECB (sudut luar segitiga besarnya sama dengan jumlah kedua sudut dalam yang tidak bersisian)

∠ EBC = ∠ ABC = ½ ∠ APC (besar sudut keliling = ½ besar sudut pusat).

∠ ECB = ∠ ACB = ½ ∠ BPD (besar sudut keliling = ½ besar sudut pusat).

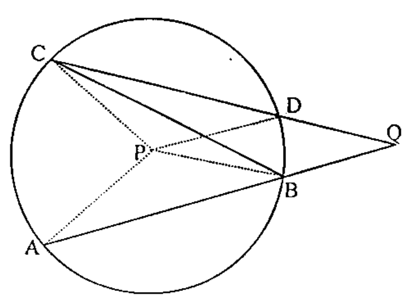
Jadi ∠ AEC = ½ ∠ APC + ½ ∠ BPD

⇔ ∠ AEC = ½ (∠ APC + ∠ BPD)

⇔ ∠ AEC = ½ (bs AC + bs BD).

Dengan demikian :

Besar sudut dalam keliling sama dengan setengah jumlah kedua busur di dalam sudut itu dan sudut yang bertolak belakang.



Gb.7.6

Gambar 7.6 menunjukkan suatu lingkaran dengan pusat P, dua talibusur AB dan CD berpotongan di titik Q yang terletak di luat lingkaran. Sudut antara dua talibusur AB dan CD yang terbentuk (∠ AQC) disebut "sudut luar keliling lingkaran" atau sudut keliling luar sebuah lingkaran.

Besar sudut luar keliling lingkaran ditentukan sebagai berikut.

$\angle$ ABC = $\angle$ BQC + $\angle$ BCQ (sudut luar segitiga besarnya sama dengan jumlah kedua sudut dalam yang tidak bersisian).

$\angle$ BQC = $\angle$ ABC - $\angle$ BCQ

= $\angle$ ABC - $\angle$ BCD

= ½ $\angle$ APC – ½ $\angle$ BPD (sudut keliling besarnya sama dengan ½ sudut

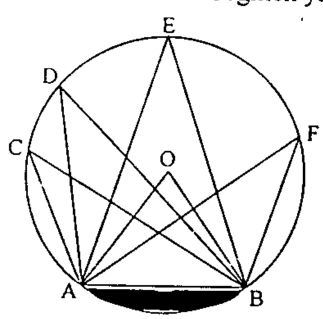
= ½ (bs AC – bs BD) pusatnya)

Jadi $\angle$ BQC = ½ (bs AC – bs BD).

Dengan demikian :

Besar sudut luar keliling lingkaran sama dengan setengah selisih kedua busur di dalam sdut itu (busur yang besar dikurangi busur yang kecil).

3. Sudut-sudut dalam Segmen yang Sama.



Gb.7.7

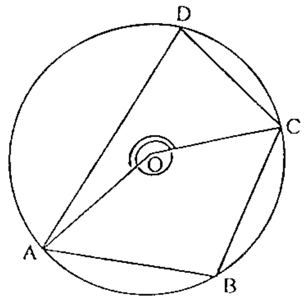
Sudut keliling ACB, AEB, AFB, bagaimana bila yang menghadap segmen (tembereng) yang sama (yang diarsir) AB, dikatakan sudut-sudut dalam segmen yang sama (yang diarsir adalah segmen yang dihadapi setiap sudut keliling tersebut).

Mengingat sifat bahwa besar sudut pusat yang menghadap busur yang sama, maka besar $\angle$ ACB = $\angle$ ADB = $\angle$ AEB = $\angle$ AFB = ½ $\angle$ AOB.

Jadi diperoleh sifat :

Sudut-sudut dalam segmen yang sama besarnya adalah sama.

4. Jumlah Sudut-sudut yang Berhadapan dalam Segiempat Talibusur.



Gb.7.8

Jika titik A, B, C dan D terletak pada lingkaran, dan jika dihubungkan talibusur AB, CD dan AD maka akan terjadi segiempat, segiempat yang terjadi ini disebut segiempat siklis (yaitu segiempat yang titik sudutnya terletak selingkaran) atau segiempat talibusur.

Dari gambar di atas, diperoleh :

$\angle$ AOC + $\angle$ refleks AOC = 360°

$\angle$ ABC = ½ . $\angle$ refleks AOC (menghadap busur ADC)

$\angle$ ADC = ½ . $\angle$ AOC (menghadap busur ABC)

$\angle$ ABC + $\angle$ ADC = ½ ($\angle$ refleks AOC + $\angle$ AOC)

= ½ . 360°

= 180°

Berdasar uraian di atas, kesimpulan :

Jumlah dua sudut yang berhadapan dalam segiempat siklis (talibusur) besarnya 180°.

Contoh :

Dalam sebuah lingkaran yang berpusat di O ada talibusur AB dan CD berpotongan di T di luar lingkaran. Sedangkan AD memotong BC di titik P. Jika busur kecil BD = 30° dan $\angle$ APC = 60°. Hitunglah besar busur AC, besar sudut luar keliling yang terjadi oleh AB dan CD, besar $\angle$ ADC dan besar $\angle$ ABC.

Penyelesaian :

Diketahui : lihat gambar 7.9

AB memotong CD di T

AD memotong BC di P

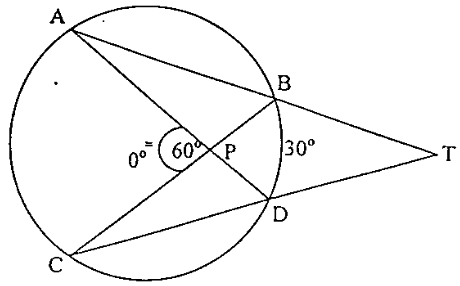
bs BD = 30°, $\angle$ APC = 60°

Ditanyakan : 1. bs AC

2. $\angle$ ATC

3. $\angle$ ADC

4. $\angle$ ABC



Gb.7.9

Jawab :

1. $\angle$ APC adalah sudut dalam keliling lingkaran, jadi berlakulah

   $\angle$ APC = ½ (bs AC + bs BD)

   60° = ½ (bs AC + 30°)

   Jadi bs AC = 120° – 30° = 90°.

2. $\angle$ ATC adalah sudut luar keliling lingkaran, jadi berlakulah

   $\angle$ ATC = ½ (bs AC – bs BD)

   = ½ (90° – 30°)

   = 30°

   Jadi $\angle$ ATC = 30°.

3. $\angle$ ADC adalah sudut keliling lingkaran, jadi berlakulah

   $\angle$ ADC = ½ $\angle$ AOC

   $\angle$ AOC = bs AC = 90°

   Jadi $\angle$ ADC = ½ × 90° = 45°

4. $\angle$ ABC adalah sudut keliling lingkaran, jadi berlakulah

   $\angle$ ABC = ½ $\angle$ AOC = ½ × 90° = 45°.

Latihan 15

1. Pada suatu lingkaran dengan pusat O terdapat titik-titik A, B, dan C. Tentukan
   a. besar $\angle$ AOB jika $\angle$ ACB = 38^o
   b. besar $\angle$ ACB jika $\angle$ AOB = 52^o
   c. besar sudut (refleks) AOB jika $\angle$ ACB = 115^o
2. Sautu lingkaran dengan pusat O, pada busurnya terdapat titik-titik K, M, N sedemikian hingga OM = MN = ON, tentukan :
   a. sudut pusat dan sudut keliling yang menghadapi busur kecil MND
   b. sudut pusat dan sudut keliling yang menghadap busur besar MKN
3. Pada suatu lingkaran, talibusur AB sejajar dengan talibusur XY, talibusur AY dan BX berpotongan di Z. Jika $\angle$ AZB = 120^o, hitunglah besar sudut-sudut yang terbentuk.
4. Pada suatu segiempat siklik ABCD, talibusur AC dan BD berpotongan di E, sedemikian sehingga AB = 8 cm, BE = 6 cm, AE = 5 cm, dan CD = 12 cm.
   a. buktikan segitiga ABE dan CDE similar (sebangun)
   b. hitung panjang EC dan ED
5. Pada suatu segiempat talibusur TRQS, TQ dan RS berpotongan di P, jika TP = 6 cm, QP = 4 cm dan PR = 8 cm maka hitunglah panjang PS.
6. Pada suatu lingkaran, sudut keliling MKG besarnya sama dengan sudut keliling GKH, jika talibusur MH dan KG berpotongan di N, maka :
   a. buktikan Δ MKN dan Δ GKH sebangun
   b. sebut pasangan segitiga yang sebangun lainnya
7. Pada Δ ABC, garis tinggi-garis tinggi AD, BE dan CF berpotongan di H.
   a. jelaskan mengapa AEHF merupakan segiempat talibusur, kemudian carilah dua segiempat lainnya yang seperti AEHF.
   b. jelaskan mengapa B, F, E, dan C merupakan titik-titik konsiklik, (terletak pada suatu lingkaran) kemudian carilah seperangkat titik-titik yang lain.
   c. dimanakah letak pusat lingkaran-lingkaran dapat kamu buat melalui keenam perangkat titik-titik konsiklik tersebut.
8. AOB adalah diameter suatu lingkaran yang berpusat di O, sedangkan ACB adalah sudut keliling. Jika besar sudut ACO adalah 34^o maka tentukan besar sudut BAC.

B. Lingkaran Dalam Segitiga

Telah kita ketahui bahwa ketiga garis bagi suatu segitiga bertemu di satu titik, misalnya titik T, yang jaraknya ketiga sisi segitiga tersebut adalah sama.

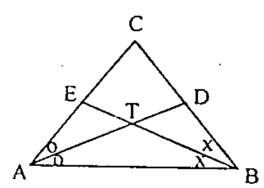
Jika dibuat sebuah lingkaran dengan T sebagai titik pusat lingkaran dan jarak dari T ke sisi segitiga sebagai jari-jari, maka lingkaran tersebut akan menyinggung ketiga sisi segitiga itu. Lingkaran itulah yang disebut lingkaran dalam segitiga, dan segitiga itu sendiri disebut segitiga luar.

Cara untuk melukis lingkaran dalam suatu segitiga adalah dengan langkah-langkah sebagai berikut :

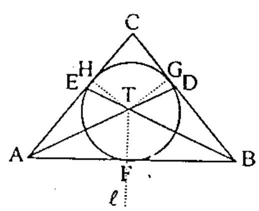
Diketahui : Δ ABC

Lukis : Lingkaran dalam Δ ABC

Lukisan :



Gb.7.10



GB.7.11

Langkah-langkah :

1. Lukis AD; garis bagi ∠ BAC
2. Lukis BE; garis bagi ∠ ABC
3. Tentukan titik potong AD dan BE, namakan T
4. Lukis garis ℓ melalui T tegak lurus AB
5. Tentukan titik potong garis ℓ dengan AB, namakan F
6. Lukis lingkaran dengan titik pusat T dan jari-jari = TF
7. Diperoleh lingkaran yang menyinggung sisi AB, BC dan AC.

Bukti :

AD garis bagi ∠ BAC

BE garis bagi ∠ ABC

AD dan BE berpotongan di T, maka T berjarak sama terhadap AB, BC dan AC. Berarti T adalah pusat lingkaran yang menyinggung sisi-sisi AB, BC dan AC. Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga ABC tersebut sama dengan TF yaitu jarak dari T ke sisi segitiga ABC, yang panjangnya dapat ditentukan berdasarkan teorema berikut ini.

Teorema :

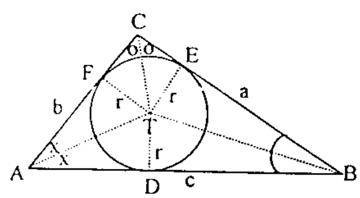
Jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga sama dengan luas segitiga itu dibagi dengan setengah keliling.

Atau dikatakan : $r = \frac{L}{s}$ dimana r = jari-jari

L = luas segitiga

s = setengah keliling segitiga

$= ½ (a + b + c)$



Gb.7.12

Diketahui :

Δ ABC dengan sisi-sisinya a, b, dan c

L = luas Δ ABC

Buktikan :

$r = \frac{L}{s}$

Bukti :

Perhatikan Gb.7.12 di atas.

Luas Δ BTC = $½ a \times r$

Luas Δ ATC = $½ b \times r$

Luas Δ ATB = $½ c \times r$

Luas Δ ABC = $½ a \times r + ½ b \times r + ½ c \times r$ +

$L = ½ (a + b + c) r$

$L = sr$

$r = \frac{L}{s}$ (terbukti)

Catatan :

Dalam menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan hal ini sering digunakan rumus luas segitiga $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

(Coba Anda buktikan rumus tersebut)

Petunjuk :

$s = ½ (a + b + c)$

Buatlah t_a garis tinggi dari titik sudut A ke sisi BC.

Dengan dalil Pythagoras didapat :

$$\sqrt{b^2 - t_a^2} + \sqrt{c^2 - t_a^2} = a$$

$$\sqrt{b^2 - t_a^2} = a - \sqrt{c^2 - t_a^2}$$

Kuadratkan kedua ruas sehingga diperoleh

$$2a\sqrt{c^2 - t_a^2} = a^2 - b^2 + c^2$$

Kuadratkan sekali lagi persamaan ini sehingga diperoleh :

$$4a^2c^2 - 4a^2t_a^2 = (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

Karena $½\ a.t_a = L$ maka $2at_a = 4L$, maka diperoleh :

$16L^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

Uraikan ruas kanan sehingga :

$16L^2 = (a + b + c)(a - b + c)(b - a + c)(b + a - c)$.

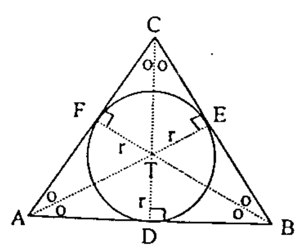
Karena $a + b + c = 2s$, maka $-a + b + c = 2(s - a)$ dan seterusnya.

Sehingga $16L^2 = 16s(s - a)(s - b)(s - c)$, akhirnya dapat diperoleh rumus luas segitiga tersebut.

Contoh 1 :

Tentukan panjang jari-jari lingkaran dalam sebuah segitiga sama sisi, dengan panjang sisi 8 cm.

Penyelesaian :



Gb.7.13

Diketahui :

Lihat Gb.7.13

Δ ABC sama sisi, AB = 8 cm.

Ditanyakan :

Panjang jari-jari lingkaran Δ ABC (r).

Jawab :

Δ ABC sama sisi, maka AB = BC = AC = 8 cm.

(Ingat garis berat sama dengan garis tinggi dan sama dengan garis bagi).

Perhatikan Δ ADC, siku-siku di D.

$CD^2 = AC^2 - AD^2$

$= 8^2 - 4^2$

$= 64 - 16$

$= 48$

$CD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

CD merupakan garis berat, maka $TD = \frac{1}{3}CD$.

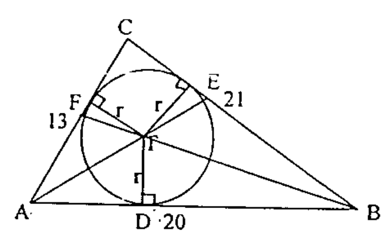
$TD = \frac{1}{3}.4\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, maka diperoleh $r = TD = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Jadi panjang jari-jari lingkaran dalam Δ ABC adalah $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm.

Contoh 2 :

Sebuah segitiga panjang sisi-sisinya adalah 13 cm, 20 cm dan 21 cm. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran dalamnya, dan hitung juga panjang bagian-bagian sisi yang terbagi oleh titik-titik singgung lingkaran dalam.

Penyelesaian :



Gb.7.14

Diketahui :

Lihat Gb.7.14

AC = 13 cm

AB = 20 cm

BC = 21 cm

Ditanya :

a) Panjang jari-jari lingkaran dalam (r)

b) Panjang : AD, DB

BE, EC

AF, FC

Jawab :

a) AC = 13, AB = 20, BC = 21, maka

$s = ½ (13 + 20 + 21) = 27$

Luas segitiga ABC, $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)}$$

$$= \sqrt{27.14.7.6} = \sqrt{1576} = 126$$

$$r = \frac{L}{s} = \frac{126}{27} = 4\frac{2}{3}$$

Jadi panjang jari-jari lingkaran dalam Δ ABC adalah $4\frac{2}{3}$ cm.

b) Misalkan AD = x, maka DB = 20 – x

AD = AF = x, maka FC = 13 – x

DB = BE = 20 – x, maka EC = 21 – (20 – x) = 1 + x

FC = EC sehingga diperoleh

$13 - x = 1 + x$

$2x = 12$

$x = 6$

Maka diperoleh :

AD = x = 6

DB = 20 – x = 20 – 6 = 14

BE = DB = 14

EC = 21 – 14 = 7

AF = x = 6

FC = 13 – 6 = 7

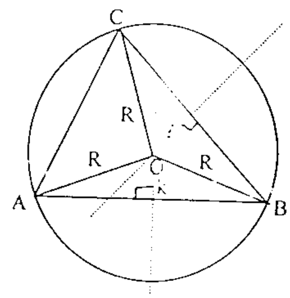
Jadi AD = 6 cm; DB = 14 cm

BE = 14 cm, EC = 7 cm

AF = 6 cm, FC = 7 cm

C. Lingkaran Luar Segitiga

Dengan memperhatikan bahwa ketiga sumbu dari Δ ABC ialah k, ℓ dan m yang bertemu di satu titik O, berarti bahwa jarak OA = OB = OC. Maka Jika dibuat suatu lingkaran dengan pusat O dan jari-jari R = OA = OB = OC, maka lingkaran itu melalui titik-titik sudut Δ ABC. Lingkaran ini disebut lingkaran Δ ABC. (Gb.7.15).



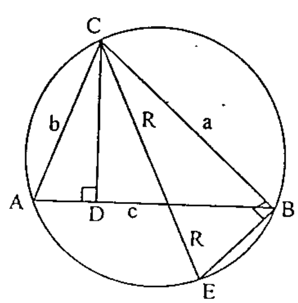
Gb.7.15

Panjang jari-jari lingkaran luar (R) dari suatu segitiga dapat ditentukan berdasarkan teorema berikut :

Teorema :

> Panjang jari-jari lingkaran luar suatu segitiga sama dengan hasil kali ketiga sisi-sisinya dibagi oleh 4 kali luas segitiga itu.

Atau dinyatakan dalam bentuk $R = \frac{abc}{4L}$ dimana a, b, c merupakan sisi-sisi dari Δ ABC dan L menyatakan luas daerah Δ ABC. Kebenaran dari teorema tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut :



Gb.7.16

Diketahui :

Δ ABC dengan sisi-sisinya a, b dan c.

R = jari-jari lingkaran luar Δ ABC.

L = luas daerah Δ ABC.

Buktikan :

$R = \frac{abc}{4L}$.

Bukti :

Perhatikan Gb.7.16 di atas.

Dari titik C ditarik garis tinggi CD = t_c.

Tarik diameter CE sehingga CE = 2R.

Perhatikan Δ ACD dan Δ ECB.

$\angle$ DAC = $\angle$ BEC (sudut keliling menghadap busur sama)

$\angle$ ADC = $\angle$ EBC = 90° (CE diameter, B pada lingkaran O).

Maka Δ ACD sebangun dengan Δ ECB.

Akibatnya CE : BC = CA : CD

$$2R : a = b : t_c$$

$$R = \frac{ab}{2t_c}.$$

Karena L = ½ .t_c . c, maka $2t_c$. c = 4L.

Sehingga diperoleh : $R = \frac{abc}{4L}$ (terbukti).

Karena luas daerah Δ ABC adalah L dimana $L = \sqrt{s(s-a)(a-b)(s-c)}$, maka rumus di atas dapat dinyatakan sebagai :

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$$

Contoh 1 :

Diketahui : Δ ABC dengan a = 13 cm b = 20 cm, dan c = 21 cm.

Ditanya : panjang jari-jari lingkaran luar Δ ABC (R).

Jawab :

$$R = \frac{abc}{4L};\ s = ½\,(13 + 20 + 21) = 27$$

$$= \frac{13.20.21}{4\sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)}}$$

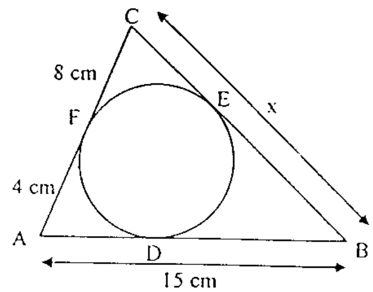
$$= \frac{13.20.21}{4\sqrt{1576}}$$

$$= \frac{13.20.21}{4.126} = 12{,}5$$

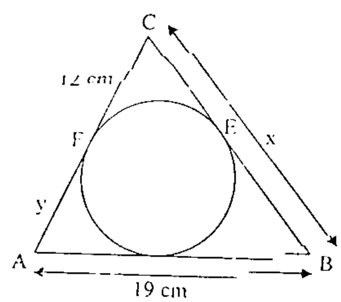
Jadi panjang jari-jari lingkaran luar Δ ABC adalah 12,5 cm.

Latihan 16.

1. Tentukan nilai x pada gambar berikut ini



2. Perhatikan gambar berikut ini



Tentukanlah nilai

a) x, jika y = 9 cm

b) y, jika x = 25 cm

3. Diketahui Δ ABC siku-siku di A. Buktikan bahwa diameter lingkaran dalam Δ ABC sama dengan b + c – a.
4. Diketahui segitiga samakaki alasnya a dan kaki-kakinya b. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran luar segitiga itu.
5. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran luar dari segitiga samasisi, jika sisinya a.
6. Buktikan bahwa pada segitiga siku-siku, panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah setengah dari hypotenusanya (sisi miring).
7. Sebuah segitiga siku-siku, sisi siku-sikunya adalah 6 cm dan 8 cm. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran luarnya.
8. Diketahui Δ ABC dengan AB = 88 cm, BC = 105 cm, dan AC = 137 cm. Hitunglah panjang jari-jari lingkaran luar Δ ABC.

BAGIAN VIII
PENUTUP

Uraian pada paket ini semoga dapat memperdalam pengetahuan guru dalam geometri, terutama pada materi yang dirasakan sulit bagi siswa maupun guru itu sendiri karena adanya materi-materi yang diturunkan dari materi SMU ataupun adanya materi-materi geometri yang tidak tercantum pada kurikulum sebelumnya.

Pada pembelajaran lukisan bangun geometri hendaknya dilaksanakan secara konsekuen menurut rambu-rambu melukis agar dapat memiliki nilai lebih yaitu menumbuhkembangkan sikap positip dalam bekerja yaitu sikap hati-hati, sistematis, bersih, rapi, dan cermat.

Pengembangan materi-materi geometri yang tercantum pada kurikulum 1994 tetapi belum tercakup pada buku paket, perlu untuk dipahami agar wawasan guru lebih luas sehingga memperlancar proses pembelajaran geometri.

Materi yang tercantum pada paket ini masih perlu untuk dikembangkan sendiri oleh guru acuan atau referensi yang diantaranya tertulis dalam daftar pustaka paket ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bos en Lepoeter. (1961). *Wegwijzer in de meetkuside, Deel 1 & 2*. Asserteedam : Y.M. Meulenhoff.

Clemens, S.R.P.G.O. Daffer. (1984). *Geometry with Applications and Problem Solving*. Massacksetts : Addeson Wesley Publishing Company Reading.

Clements, et al. (1967). *Mathematics for Today and Tomorrow, Book II*. Melbourne : Su: Books.

De Baan, M.A. & Boss, Y.C. (1963). *Ilmu Ukur untuk Sekolah Menengah, Jilid II*. Jakarta : J.B. Wolters.

Depdikbud. (1993). *Kurikulum Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama. Garis-garis Besar Program Pengajaran (GBPP) Bidang Studi Matematika*. Jakarta Depdikbud.

Djoko Iswadji. (2000). *Kesebangunan dan Kongruensi. Paket Pembinaan Penataran*. Yogyakarta : PPPG Matematika.

Geilert, W. et al. (1977). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*. New York : Van Nostrand Reinhold Company.

Imam Rodji. (1991). *Geometri IIB. Modul Pembinaan Peminat Calon Peserta Olimpiade Matematika International*. Yogyakarta : PPPG Matematika.

Junaedi, D. et al. (1998). *Penuntun belajar Matematika untuk SLTP*. Bandung : PT. Mizan Pustaka.

Jurgensen, R.C., Brown, R.G & King, A.M. *Geometry*. Hopewell, N.J : Houghton Mifflin Company, Boston.

Kodir, A. et al. (1976). *Matematika untuk SMA Jilid 7 dan 8*. Jakarta : NV. Masa Baru.

Krismanto, A. (1996). *Aplikasi Matematika : Pengubinan*. Diktat Penataran Matematika SLTP. Yogyakarta : PPPG Matematika.

Krismanto, A. (2000). *Transformasi Bidang. Paket Pembinaan Penataran*. Yogyakarta : PPPG Matematika.

Keripers, L & Wirasto. (1959). *Planimetri untuk Kursus BI dan BII Ilmu Pasti*. Jakarta : Noordhoff – Koeff NV.

Mianto. K. et al. (1990). *Matematika Sekolah Menengah Umum Tingkat Pertama.* Jakarta: PT. Kelapa Cengkir Raya.

Ranucci, E.ER & Teeters, J.L. (1977). *Creating Escher – type Drawings.* Palo Alto : Creative Publications.

Rich, B. (1963). *Plane Geometry. Schaum's Outline Series.* New York : Mc-Graw-Hill Book Company.

Slamet, S & Giyatno. (1989). *Matematika SMP.* Surakarta : Widya Duta.

Setiawan. (2000). *Lingkaran. Paket Pembinaan Penataran.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Soejadi, R & Djoko, M. (1996). *Matematika 3 untuk Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama Kelas 3.* Jakarta : Balai Pustaka.

Soesanto, B. (1994). *Matematika 4/G (Geometri Transformasi). Modul Pembinaan Peminat Calon Peserta IMO.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Soesanto, B. (1999). *Geometri I. Paket Pembinaan Calon Peserta IMO.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Soleh, M. et al. (1995). *Matematika SLTP 2.* Jakarta : Yudhistira.

Stewart, I.(1976). *Concept of Modern Mathematics.* New York : Penguin Books Ltd.

Suhardjo. (1972). *Geometri (Bidang Datar).* Surakarta : IKIP Negeri.

Suhardjo. (1972). *Sejarah Matematika.* Surakarta : FKIE – IKIP.

Susilo & Rudjito. (1988). *Matematika untuk SMP.* Bandung : Ganeca Exact.

Tim Matematika. (1988). Matematika SLTP Kelas 3, Cawu I. Jakarta : Yudhistira.

Winarno. (1999). *Garis-garis Sejajar Dalam Susunan Deduktif-Aksiomatik. Paket Pembinaan Penataran.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Winarno. (1999). *Lingkaran Dalam dan Lingkaran Luar Segitiga. Paket Pembinaan Penataran.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Winarno. (2000). *Dasar-dasar Melukis. Paket Pembinaan Penataran.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Wirasto. (1975). *Perkembangan Pengajaran Ilmu Ukur.* Yogyakarta : FKIE-IKIP.

Wirasto. (1983). *Didaktik Matematika Pelajaran Geometri.* Yogyakarta : PPPG Matematika.

Yaglom, I.M & Sjields, A. (1968). *Geometric Transformation I.* Toronto : Random House of Canada.

Yaglom, I.M & Sjields, A. (1968). *Geometric Transformation II.* Toronto : Random House of Canada.