Fungsi, Persamaaan, Pertidaksamaan

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA
Jenjang Dasar
Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika

Oleh:
Drs. Markaban, M.Si.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

==

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

DAFTAR ISI

BAB I
FUNGSI

A. Pengertian Fungsi

Konsep "fungsi" merupakan hal yang penting dalam berbagai cabang matematika. Pengertian fungsi dalam matematika berbeda dengan pengertian dalam kehidupan sehari-hari. Dalam pengertian sehari-hari, "fungsi" adalah guna atau manfaat. Kata fungsi dalam matematika sebagaimana diperkenalkan oleh Leibniz (1646-1716) digunakan untuk menyatakan suatu hubungan atau kaitan yang khas antara dua himpunan, sehingga fungsi dapat dikatakan merupakan hal yang istimewa dari suatu relasi antara dua himpunan.

Perhatikan berikut ini :

Lima buah gelas yang sama ukurannya, tingginya masing-masing 12 cm disusun seperti pada gambar di samping. Gelas kedua dan seterusnya hanya separo yang dapat masuk ke gelas di bawahnya. Jika diukur tinggi keseluruhannya diperoleh:

Banyak gelas	1	2	3	4	5
Tinggi tumpukan	12 cm	18 cm	24 cm	30 cm	36 cm

Jika ada 8 gelas, berapa tinggi tumpukannya? Jika tinggi sebuah gelas adalah t dan ada 10 gelas, berapa tinggi tumpukannya?

Tinggi tumpukan "merupakan fungsi**"** banyak gelas. Perubahan banyaknya gelas terkait atau berelasi langsung dengan perubahan tinggi tumpukan. Jika tinggi setiap gelas t cm dan banyak gelas g, nyatakan sebuah fungsi yang menyatakan hubungan antara tinggi tumpukan dan banyak gelas yang ditumpuk.

Suatu fungsi dapat kita bayangkan sebagai suatu mesin yang dapat kita gambarkan :

$$x \longrightarrow \boxed{\text{Funggsi } f} \longrightarrow f(x)$$

Masukan | Keluaran

Ia memproses bilangan (masukan) sehingga diperoleh suatu hasil (keluaran). Setiap bilangan yang dimasukkan hasilnya satu bilangan tunggal sebagai keluaran, tetapi dapat terjadi bahwa beberapa masukan yang berlainan dapat menghasilkan keluaran yang sama.

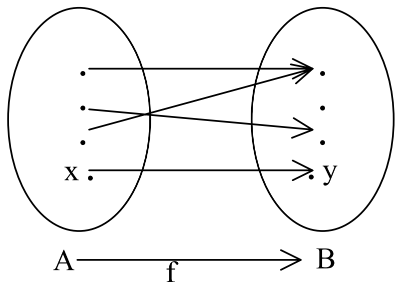
Untuk mendefinisikan suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B diperlukan :

1) suatu himpunan A

2) suatu himpunan B

3) aturan yang memasangkan setiap elemen $x \in A$ dengan satu elemen tunggal $y \in B$

Perhatikan diagram dibawah ini:



Relasi fungsional atau sering disingkat fungsi sering juga disebut dengan istilah pemetaan (mapping) didefinisi-kan sebagai berikut:

Definisi: *Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu <u>relasi</u> yang memasangkan <u>setiap elemen dari A secara tunggal</u>, dengan elemen pada B.*

Ditulis $f : A \rightarrow B$ dibaca "fungsi f memetakan A ke B"

Apabila f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta dari x oleh f dinotasikan dengan f(x), dan biasa ditulis dengan $f{:}x \rightarrow f(x)$, sedangkan x biasa disebut prapeta dari f(x)

Himpunan A dinamakan daerah asal (domain) dari fungsi f , sedangkan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) sedangkan himpunan dari semua peta di B dinamakan daerah hasil (range) dari fungsi f tersebut.

Ada beberapa cara penyajian fungsi, di antaranya:

1) Dalam diagram panah.
2) $f: D \rightarrow K$. Ini menyatakan bahwa fungsi f mempunyai domain D dan kodomain K.

   Untuk selanjutnya jika domain dan kodomain fungsi tidak dinyatakan yang dimaksud adalah himpunan bilangan real yang mungkin memenuhi terjadinya fungsi, misalnya : $f(x) = \sqrt{x}$, hanya terdefinisi bila $x \geq 0$ dan $x \in R$.

   Lambang fungsi tidak harus f. Misalnya :

   - $l_t = l_0(1 + \lambda t)$ atau $l(t) = l_0(1 + \lambda t)$
   - $u_n = n^2 + 2n$ atau $u(n) = n^2 + 2n$
3) Penyajian pasangan berurutan

   Cara ini efektif hanya jika himpunannya terbatas dan anggotanya "diskrit"
4) Grafik Kartesius
5) Dalam bentuk aturan-aturan atau dengan kata-kata, misalnya:

   a) tambah 1 dan (kemudian) kuadratkan.

   b) kuadratkan dan (kemudian) tambah 1

6) Aturan seperti pada 5. a) dan b) dapat dinyatakan dalam bentuk aljabar:

a) $(x + 1)^2$ atau $f(x) = (x + 1)^2 \rightarrow$ yang terakhir ini disebut persamaan fungsi

b) $x^2 + 1$ atau $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow$ yang terakhir ini disebut persamaan fungsi

7) Dalam bentuk persamaan :

eksplisit, misalnya $y = 2x + 3$ dengan $y = f(x)$. Dalam hal ini x disebut peubah bebas, y peubah terikat.

implisit, misalnya $2x - y + 3 = 0$

8) Penyajian parametrik:

Jika sebuah fungsi $f: x \rightarrow y = f(x)$ atau bentuk relasi tertentu disajikan dalam dua fungsi secara terpisah dalam bentuk $x = f_1(t)$ dan $y = f_2(t)$, t dinamakan sebuah parameter.

Contoh: $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{2}t \end{cases}$ merupakan bentuk parameter dari $y = \frac{1}{4}x$, yang diperoleh dengan mengeliminasi t dari kedua persamaan.

9) Fungsi kuadrat yang persamaannya $f(x) = x^2$ dengan domain himpunan semua bilangan cacah kurang dari 11 mungkin lebih mudah dipahami dengan menyajikannya dalam bentuk tabel:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Contoh 1:

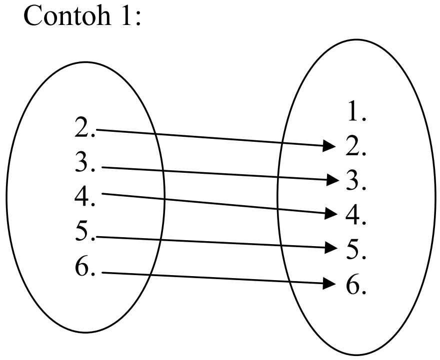


Diagram di atas adalah fungsi karena pertama, terdapat *relasi* (yang melibatkan dua himpunan yakni A dan B) dan kedua, pemasangan s*etiap elemen A adalah secara tunggal.*

Contoh 2 :

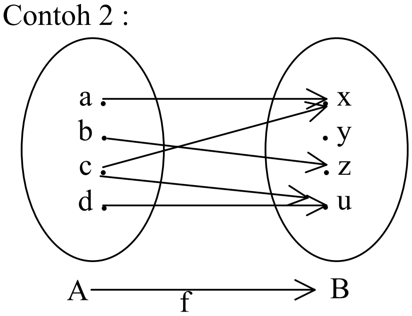
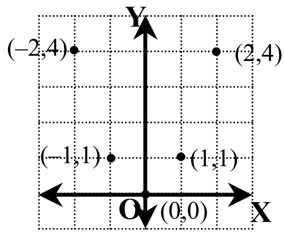


Diagram di samping bukan merupakan fungsi karena ada elemen A yang dipasangkan *tidak* secara tunggal dengan elemen pada B

Contoh 3 :



Grafik di samping menyajikan sebuah fungsi, namakanlah fungsinya adalah f.
Misalnya domainnya D_f dan rangenya R_f maka fungsi itu dapat didefinisikan f: $x \rightarrow f(x) = x^2$.

- $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $R_f = \{0, 1, 4\}$.

- 4 disebut bayangan (peta) dari 2 dan dari –2. Karena $f(2) = 4$ dan juga $f(-2) = 4$.
- – 2 dan 2 disebut prapeta dari f, dan dilambangkan $f^{-1}(4) = 2$ atau – 2.
- Nilai f bernilai 0 untuk x = 0. Nilai yang menyebabkan f bernilai 0 disebut pembuat nol atau harga nol fungsi. Misalnya : $f(x) = x^2 - 2x$, maka ada dua pembuat nol yaitu 0 dan 2.

Contoh 4 :

Diketahui $A = \{x \mid -3 \le x < 3, x \in R\}$ dan suatu fungsi f: $A \rightarrow R$

Ditentukan oleh rumus $f(x) = x^2 + 1$

a. Carilah f(-1), f(0) dan prapeta dari 5

b. Dengan melukis grafik, tentukan daerah hasil dari fungsi f.

c. Jelaskan bahwa f adalah suatu fungsi.

Jawab:

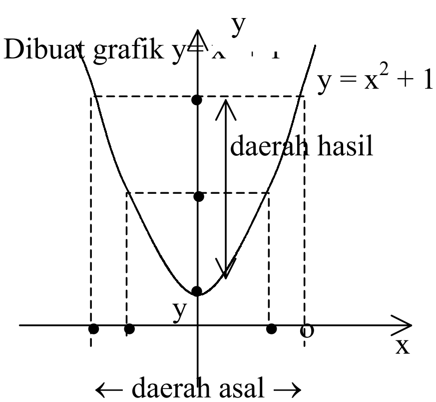
a. $f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

Prapeta dari 5 $\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Sehingga prapeta dari 5 adalah 2 atau –2

b. Dibuat grafik $y = x^2 + 1$



$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$

$f(3) = (3)^2 + 1 = 10$

titik balik (0,1)

Jadi daerah hasil dari fungsi f adalah:

$R = \{\, y \mid 1 \le y \le 10,\ y \in R \,\}$, karena nilai $f(x) = y$ terletak pada interval tersebut sebagaimana terlihat pada sumbu y.

c. Karena f suatu relasi dimana setiap elemen pada domain A (sumbu x) dipasangkan secara tunggal maka f merupakan fungsi.

B. Macam-macam Fungsi

1. Beberapa Fungsi Khusus

Jika daerah asal dari fungsi tidak dinyatakan maka yang dimaksud adalah himpunan semua bilangan real (R). Untuk fungsi-fungsi pada R kita kenal beberapa fungsi khusus antara lain sebagai berikut.

1). Fungsi Konstan

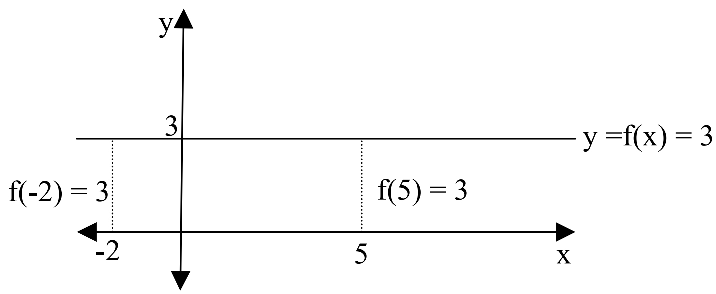
Fungsi **$f : x \rightarrow C$ dengan C konstan disebut fungsi konstan (tetap).**

Fungsi f memetakan setiap bilangan real dengan C.

Grafik fungsi konstan $y = f(x)$ dengan $f(x) = c$ adalah garis lurus yang sejajar sumbu X untuk $c \neq 0$ dan berimpit dengan sumbu X jika $c = 0$

Contoh :

Fungsi $f: x \rightarrow 3$



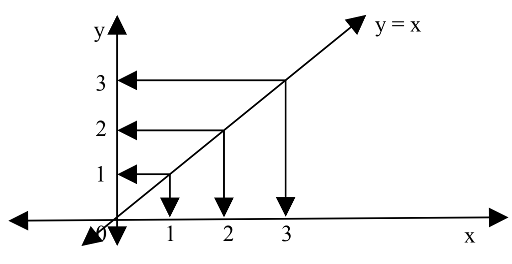
$f(-2) = 3$
$f(0) = 3$
$f(5) = 3$

2). Fungsi Identitas

Fungsi $R \rightarrow R$ yang didefinisikan sebagai:

$I : x \rightarrow x$ disebut fungsi identitas

Grafik fungsi identitas $y = x$ adalah garis lurus yang melalui O(0,0).



$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

3). Fungsi Modulus

Nilai mutlak (modulus) suatu bilangan real x didefinisikan sebagai :

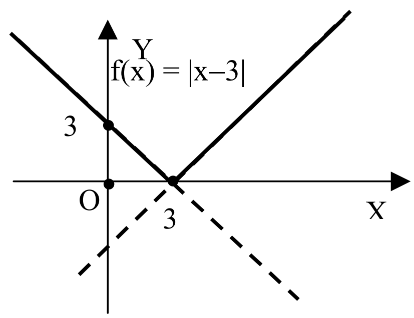
$$|x| = \begin{cases} x \text{ jika } x \geq 0 \\ -x \text{ jika } x < 0 \end{cases}$$

Misalnya : | 3 | = 3 ; |–3| = 3

Fungsi M : $x \to M(x)$ disebut fungsi modulus jika M(x) = |f(x)|

Contoh :

Grafik fungsi f yang didefinisikan oleh f(x) = |x – 3| adalah :



$$f(x) = |x - 3|$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ jika } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) \text{ jika } x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 \text{ jika } x \geq 3 \\ -x + 3 \text{ jika } x < 3 \end{cases}$$

4). Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f : x $\to$ f(x) disebut fungsi genap jika f(–x) = f(x), dan

Fungsi f : x $\to$ f(x) disebut fungsi ganjil jika f(–x) = –f(x), sedang fungsi yang tidak memenuhi salah satu dari pernyataan di atas dikatakan fungsi yang tidak genap maupun tidak ganjil.

Contoh :

1. Fungsi f : $x \to x^2$ adalah fungsi genap, sebab f(–x) = $(-x)^2 = x^2 = f(x)$
2. Fungsi f : $x \to x^3 - 2x$ adalah fungsi ganjil

   sebab f(-x) = $(-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$
3. Fungsi f : $x \to x^2 - x$ adalah bukan fungsi genap maupun ganjil

   sebab f(–x) = $(-x)^2 - (-x) = x^2 + x$ di mana bentuk terakhir ini tidak sama dengan f(x) maupun –f(x).

5). Fungsi Tangga atau Fungsi Nilai Bulat Terbesar

Yang dimaksud dengan pembulatan kenilai bulat terbesar, adalah :

[[x]] = {b | b $\leq$ x < b + 1, b bilangan bulat, x$\in$**R**}

Contoh :

Jika $-2 \leq x < -1$ maka [[x]] = –2

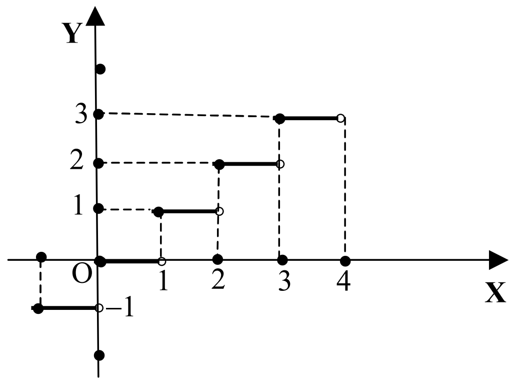
$-1 \leq x < 0$ maka [[x]] = – 1

$0 \le x < 1$ maka [[x]] = 0 ……..

$7 \le x < 8$ maka [[x]] = 7

Fungsi f : $x \to [[x]]$ disebut fungsi nilai bulat terbesar.

Grafik fungsi f(x) = [[x]], untuk x $\in$ **R** , diperlihatkan sebagaimana kurva di bawah :



Oleh karena grafiknya menyerupai tangga, maka f(x) = [[x]], sering disebut fungsi tangga.

6). Fungsi Linear

Fungsi f : $R \to R$ yang didefinisikan : f(x) = ax + b, a dan b konstan dengan $a \ne 0$ disebut fungsi liniar.

7). Fungsi Kuadrat

Fungsi f : $R \to R$ yang didefinisikan : f(x) = $ax^2 + bx + c$ dengan a,b,c $\in$ R dan $a \ne 0$ disebut fungsi kuadrat.

8). Fungsi Turunan

Fungsi f : $R \to R$ adalah suatu fungsi yang diketahui dan f' ditentukan oleh :

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ maka f' disebut fungsi turunan

2. Jenis Fungsi

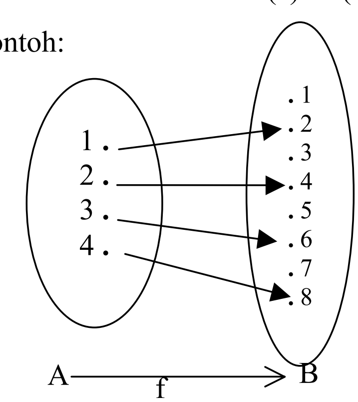
Dengan memperhatikan elemen-elemen pada domain dan kodomain yang direlasikan dalam suatu fungsi, maka kita mengenal jenis fungsi yakni sebagai berikut :

1). Injektif (Satu-satu)

Misalkan fungsi f menyatakan A ke B maka fungsi f disebut suatu fungsi satu-satu (injektif), apabila setiap dua elemen yang berlainan di A akan dipetakan pada dua elemen yang berbeda di B. Dapat dikatakan bahwa f:A→B adalah fungsi injektif apabila a ≠ a’ berakibat f(a) ≠ f(a’) atau ekuivalen jika f(a) = f(a’) berakibat a = a’.

Contoh:

1).



Adapun fungsi pada A = {bilangan asli} yang didefinisikan dengan f(x) = 2x adalah fungsi satu-

satu, sebab kelipatan dua dari setiap dua bilangan yang berlainan adalah berlainan pula.

2). Fungsi f pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ bukan suatu fungsi satu-satu sebab $f(-2) = f(2)$.

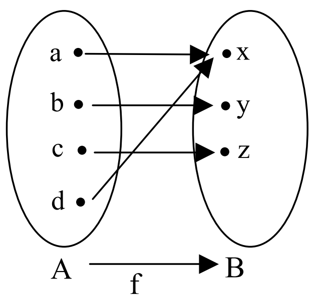
2. Surjektif (Onto)

Misalkan f suatu fungsi yang memetakan A ke B maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari B, atau $f(A) \subset B$, fungsi ini kita kenal dengan nama fungsi into (ke dalam). Jika f(A) = B, yang berarti setiap elemen di B pasti merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A maka kita katakan f adalah suatu fungsi surjektif atau "f memetakan A onto B"

Contoh:

1). Fungsi f: $R \rightarrow R$ yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^2$ bukan fungsi yang onto karena himpunan bilangan negatif tidak dimuat oleh hasil fungsi tersebut.

2).



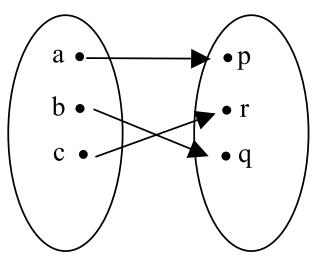
Misal A = {a, b, c, d} dan B = {x, y, z} dan fungsi f: $A \rightarrow B$ disamping adalah suatu fungsi yang surjektif karena daerah hasil f adalah sama dengan kodomain dari f (himpunan B).

3. Bijektif (Korespondensi Satu-satu)

Suatu pemetaan f: $A \rightarrow B$ sedemikian rupa sehingga f merupakan fungsi yang injektif dan surjektif sekaligus, maka dikatakan "f adalah fungsi yang bijektif" atau " A dan B berada dalam korespondensi satu-satu".

Contoh:

1)



Relasi dari himpunan A = {a, b, c} ke himpunan B = {p, q, r} yang didefinisikan sebagai diagram di samping adalah suatu fungsi yang bijektif.

2). Fungsi f yang memasangkan setiap negara di dunia dengan ibu kota negara-negara di dunia adalah fungsi korespondensi satu-satu (fungsi bijektif), karena tidak ada satu kotapun yang menjadi ibu kota dua negara yang berlainan.

C. Aljabar Fungsi

1. **Jumlah dan Selisih Dua Fungsi**

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta f(x) dan g(x) ada pada kedua domain tersebut maka :

1). Jumlah fungsi f dan g ditulis dengan simbol f + g adalah suatu fungsi :

$f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$

2). Selisih fungsi f dan g ditulis dengan simbol f - g adalah suatu fungsi :

$f - g : x \rightarrow f(x) - g(x)$

Adapun domain dari f + g dan f – g adalah irisan dari D_f dan D_g ($D_f \sqcap D_g$)

Contoh :

Diketahui fungsi f dan g masing-masing pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2x + 3$. Tentukan : a). f + g

b). f – g

c). prapeta dari 12 untuk fungsi f – g

Jawab:

a). $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x) = x^2 + (2x + 3) = x^2 + 2x + 3$

Jadi $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 3$

b). $f - g : x \rightarrow f(x) - g(x) = x^2 - (2x + 3) = x^2 - 2x - 3$

Jadi $(f - g)(x) = x^2 - 2x - 3$

c). $(f - g)(x) = 12 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = - 3$ atau $x = 5$

Jadi prapeta dari 12 untuk fungsi f – g adalah x = - 3 atau x = 5

2. **Perkalian dan Pembagian Dua Fungsi**

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain D_f dan D_g dan peta-peta f(x) dan g(x) ada pada kedua domain tersebut maka :

1). Hasil kali fungsi f dan g ditulis dengan f x g didefinisikan dengan :

$f \times g : x \rightarrow f(x) \times g(x)$

2). Hasil bagi fungsi f dan g ditulis dengan $\frac{f}{g}$ didefinisikan dengan :

$\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan $g(x) \neq 0$

Adapun domain dari f x g dan $\frac{f}{g}$ adalah irisan dari D_f dan D_g ($D_f \sqcap D_g$)

Contoh :

Diketahui fungsi f dan g masing-masing pada R yang ditentukan oleh f(x) = 2x + 3 dan g(x) = x - 1 . Tentukan :

a). rumus fungsi f x g dan (f x g)(2)

b). rumus fungsi $\frac{f}{g}$ dan domain $\frac{f}{g}$

Jawab :

a). $f \times g : x \to f(x) \times g(x) = (2x + 3)(x - 1) = 2x^2 + x - 3$

Jadi rumus fungsi $(f \times g)(x) = 2x^2 + x - 3$ dan $(f \times g)(2) = 7$

b). $\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+3}{x-1}$

Jadi rumus fungsi $\frac{f}{g}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ dan

domain dari fungsi $\frac{f}{g}$ adalah $D_f \sqcap D_g = R - \{ x | x - 1 = 0 \} = \{ x | x \in R, x \neq 1 \}$

Latihan 1 :

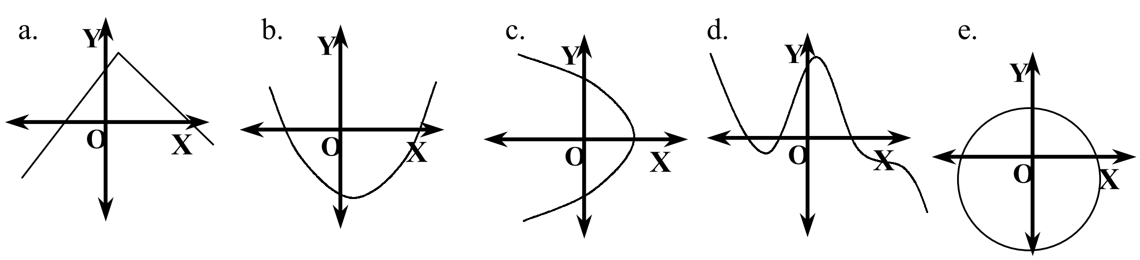
1. Diketahui himpunan D = {1,2,3,4,5}. Suatu relasi pada D ini, manakah yang berupa pemetaan dan berikan alasannya !

a). R = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}

b). R = {(1,2),(2,3),(2,4),(4,5),(5,1)}

c). R = {(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2)}

2. Nyatakan apakah grafik-grafik berikut adalah grafik fungsi. Berilah alasannya:



3. Suatu fungsi f: R→R ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2$

a). Tentukan f(-1), f(a), dan f(1).

b). Tentukan a jika f(a) = 27

c). Anggota manakah dari daerah asal yang mempunyai peta 18 ?

d). Tentukan daerah hasil fungsi f.

4. Diketahui fungsi pada R yang didefinisikan dengan :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ , jika } x < 0 \\ 2 \text{ , jika } 0 \le x < 2 \\ 3 \text{ , jika } x \ge 2 \end{cases}$$

Gambarlah sketsa grafik tersebut !

5. Tuliskan rumus fungsi f yang ditentukan oleh aturannya berikut ini:
   a) kuadratkan, kemudian kurangi dengan dua kalinya
   b) kuadratkan, tambah 3, kemudian kalikan dengan 4
   c) kurang dengan 3, kuadratkan, kemudian tarik akar kuadratnya

6. Manakah yang merupakan fungsi injektif, surjektif, atau bijektif dari fungsi dengan domain {1, 2, 3, 4}, yang didefinisikan sebagai berikut?
   a. R = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
   b. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3}
   c. R = {(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4}
   d. R = {(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4); jika kodomainnya {1, 2, 3, 4, 5, 6}

7. Jika A dalan interval $[-1,1]$ atau A={ $x|$ -1 ≤ x ≤ 1 , x∈R }, tentukan daerah kawan fungsi f: A→R yang didefinisikan berikut ini agar fungsi ini surjektif !

   a. $f(x) = x^2$ b. $f(x) = 2x + 1$ c. $f(x) = x - 3$

8. Gambarlah grafik fungsi modulus berikut :

   a. $f : x \to -|x|$ b. $f : x \to 1 + |x|$ c. $f : x \to |x^2 - 1|$

9. Jika f(x) adalah fungsi kuadrat , maka fungsi apakah g(x) jika g(x) = f(x +p) – f(x)

10. Jika fungsi f dan g terdefinisi pada bilangan real , yang didefinisikan f(x) = 2x - 1 , dan g(x) = x + 3 maka tentukan :

    a. Rumus fungsi f + g, f – g, f x g dan $\frac{f}{g}$

    b. Derah hasil dari f x g

    c. Daerah asal dari $\frac{f}{g}$

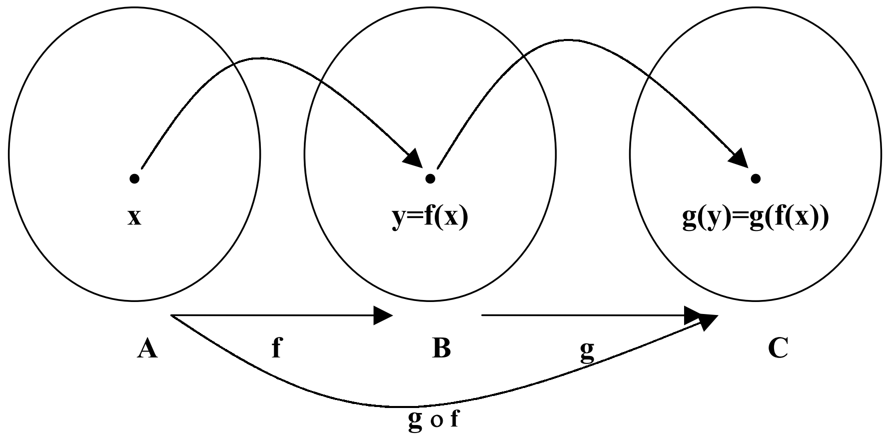
BAB II

KOMPOSISI FUNGSI DAN FUNGSI INVERS

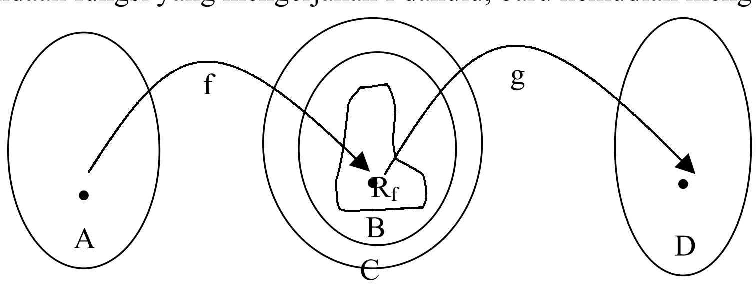
A. Fungsi Komposisi

1. Menentukan Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke dalam himpunan B, dan fungsi g memetakan himpunan B ke dalam C sebagaimana ilustrasi di bawah ini :



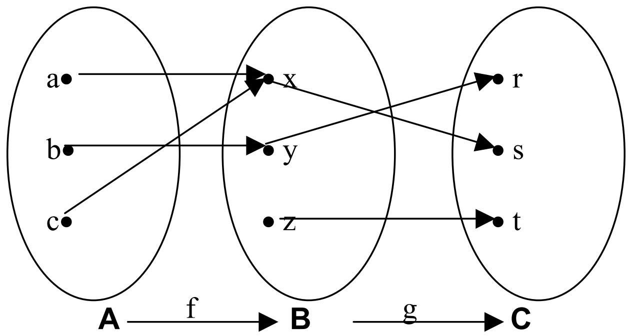
Untuk $a \in A$ maka petanya f(a) berada di B yang juga merupakan domain dari fungsi g, oleh sebab itu pasti diperoleh peta dari f (a) di bawah pemetaan g yaitu g (f(a)). Dengan demikian kita mempunyai suatu aturan yang menentukan setiap elemen $a \in A$ dengan tepat satu elemen $g(f(a)) \in C$. Fungsi baru inilah yang disebut fungsi komposisi dari f dan g, yang dinyatakan dengan notasi $g \circ f$ (dibaca "g bundaran f"). Secara singkat, jika $f : A \to B$, dan $g : B \to C$ maka kita definisikan suatu fungsi komposisi $g \circ f : A \to C$ sedemikian hingga $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Perhatikan bahwa fungsi komposisi $g \circ f$ adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, baru kemudian mengerjakan g.



Dengan memperhatikan definisi dari fungsi komposisi di atas , dua fungsi $f : A \to B$, dan $g : C \to D$ dapat diperoleh fungsi komposisi $g \circ f$ apabila daerah hasil dari fungsi f atau R_f merupakan himpunan bagian dari C (domain g atau D_g). Demikian juga agar diperoleh fungsi komposisi $f \circ g$ maka syaratnya daerah hasil dari fungsi g yakni R_g haruslah menjadi himpunan bagian dari domain f, yaitu $R_g \subset A$

Contoh 1:

Misalkan f : A $\rightarrow$ B dan g : B $\rightarrow$ C yang didefinisikan sebagai berikut :



(gof) : A $\rightarrow$ C ditentukan oleh :

(gof) (a) = g (f(a)) = g (x) = s
(gof) (b) = g (f(b)) = g (y) = r
(gof) (c) = g (f(c)) = g (z) = s

Contoh 2

Fungsi f : R $\rightarrow$ R , g : R $\rightarrow$ R dan h: R $\rightarrow$ R yang didefinisikan oleh rumus f (x) = x + 2 , g (x) = $3x^2$ dan h(x) = 2x - 3

Tentukan : a) (gof) (1) dan (fogoh) (1)

b) rumus untuk (gof), (fog) dan (fogoh)

Jawab :

a. (gof) (1) = g (f(1)) = g (1 + 2) = g (3) = 3 (3^2) = 27
(fogoh) (1) = f (g(h(1))) = f (g(-1)) = f (3) = 3 + 2 = 5

b. (gof) : x $\rightarrow$ (gof) (x) = g (f(x)) = g (x + 2) = 3 (x +2 $)^2$ = $3x^2 + 12x + 12$
Sehingga (gof) : x $\rightarrow$ $3x^2 + 6x + 12$
(fog) : x $\rightarrow$ (fog) (x) = f (g(x)) = f ($3x^2$) = $3x^2 + 2$
Sehingga (fog) : x $\rightarrow$ $3x^2 + 2$
(fogoh) : x $\rightarrow$ (fogoh)(x) = f (g(h(x)))

= f (g(2x - 3))

= f ($3(2x – 3)^2$ = f ($12x^2 – 36x + 27$) = $12x^2 – 36x + 29$

Sehingga (fogoh) : x $\rightarrow$ $12x^2 – 36x + 29$

Contoh 3:

Fungsi f : R $\rightarrow$ R dan g : $\{ x | x \geq 1, x \in R)$ $\rightarrow$ R didefinisikan oleh rumus f (x) = x + 2 , dan g(x) = $\sqrt{x-1}$. Selidiki apakah gof ada, jika tidak ada tentukan domain dari f dan g agar diperoleh gof

Jawab :

Karena daerah hasil dari fungsi f atau R_f tidak merupakan himpunan bagian dari domain g, yaitu $R_f \supset D_g$ sehingga gof tidak dapat didefinisikan, misalnya f(2) = 4 dan 4 $\in D_g$, tetapi f(-2) = 0 dan $0 \notin D_g$.

Agar diperoleh gof maka daerah hasil dari fungsi f harus merupakan himpunan bagian dari domain g . Dari fungsi g(x) = $\sqrt{x-1}$ dengan domain $D_g = \{ x | x \geq 1, x \in R)$ sedang (gof) (x) = g (f(x)) = g(x + 2) = $\sqrt{(x+2)-1} = \sqrt{x+1}$. Dengan demikian domain dari f, yaitu D_f diperoleh dari x + 1 ≥ 0 ⇔ x ≥ -1. Jadi, $D_f = \{ x \mid x \geq -1, x \in R \}$.

2. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

Dua buah fungsi f dan g dikatakan sama (f = g) apabila kedua fungsi tersebut mempunyai domain yang sama. Dan setiap elemen di domain a∈D diperoleh peta yang sama dari kedua fungsi, yaitu f(a) = g(a).Dari definisi kesamaan fungsi didapat sifat-sifat komposisi fungsi sebagai berikut :

1). Komposisi fungsi tidak bersifat komutatif (contoh 2b di atas bahwa gof ≠ fog)

2). Komposisi fungsi bersifat asosiatif fo(goh) = (fog)oh

3). Fungsi I yang memetakan I : x → x disebut fungsi identitas atau fungsi netral sehingga Iof = foI = f

4). Jika untuk fungsi f : x → f(x) dan fungsi g : x → g(x) yang terdefinisi pada suatu domain sedemikian sehingga diperoleh fog = gof = I dengan I fungsi identitas maka g dapat dikatakan sebagai fungsi invers dari f ditulis dengan notasi f^{-1}.

Jadi $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

B. Fungsi Invers

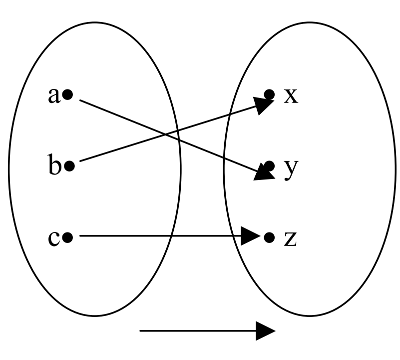
1. Invers Suatu Fungsi

Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B dan misalkan untuk suatu a∈A petanya adalah f(a) = b∈B, maka invers dari b (dinyatakan dengan $f^{-1}(b)$) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki b∈B sebagai petanya.

Secara singkat, jika f : A → B sedemikian hingga f : x → f (x) maka yang dimaksud dengan invers fungsi f adalah : $f^{-1}(b) = \{x \mid x \varepsilon A, f(x) = g\}$ (notasi f^{-1} dibaca " f invers")

Contoh :

Misalkan f : A → B didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut :



maka :
$f^{-1}(x) = b$
$f^{-1}(y) = a$

$f^{-1}(z) = c$

A f B

2. Fungsi Invers

Misalkan f adalah suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya $f^{-1}(b)$ untuk suatu $b \in B$ dapat terdiri lebih dari satu elemen atau mungkin tidak ada. Jika $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi yang bijektif, maka untuk setiap $b \in B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian kita mendapatkan suatu aturan yang menetapkan untuk setiap $b \in B$ dengan suatu elemen tunggal $f^{-1}(b)$ dalam A. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke dalam A, dan kita tulis fungsi $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Disini fungsi f^{-1} kita sebut " fungsi invers dari f "

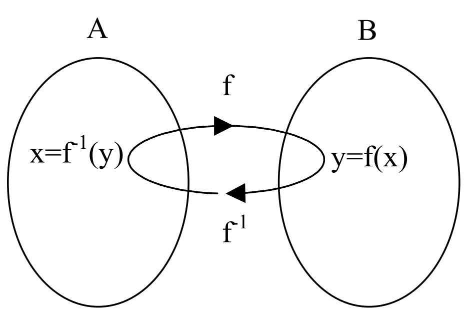
Catatan : Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ akan diperoleh fungsi invers $f : B \rightarrow A$ hanya apabila f suatu fungsi yang bijektif, injektif dan surjektif sekaligus

Secara umum jika f adalah fungsi bijektif maka f menentukan setiap $x \in A$ ke $y \in B$, dan f^{-1} menentukan setiap $y \in B$ ke $x \in A$, sehingga : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

3. Menentukan rumus fungsi invers

Telah diuraikan sebelumnya bahwa jika f dan f^{-1} adalah fungsi-fungsi yang saling invers, maka $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Perhatikan gambar sebagai berikut :



Untuk menentukan rumus fungsi invers dari fungsi f dapat dilakukan langkah-langkah:

- Memisalkan $f(x) = y$
- Menyatakan x dalam y

- Menentukan rumus dari $f^{-1}(x)$ dengan mengingat $f^{-1}(y) = x$ dan mengganti variable y dengan x

Cara menentukan fungsi invers dari beberapa bentuk fungsi antara lain :

a). Menentukan rumus umum fungsi invers dari fungsi linear

Untuk fungsi $f(x) = ax + b$ dapat dicari fungsi inversnya sebagai berikut :

Misal : $f(x) = y \Rightarrow \ y = ax + b \Leftrightarrow ax = y - b$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

Jadi, jika $f(x) = ax + b$, maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

Contoh :

Jika $f(x) = 2x + 3$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

b) Menentukan rumus umum fungsi invers dari fungsi rasional

Jika $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $x \neq \dfrac{-d}{c}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$; $x \neq \dfrac{a}{c}$ (buktikan !)

Contoh :

1. Jika $f(x) = \dfrac{-2x+4}{3x+5}, x \neq \dfrac{-5}{3}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-5x+4}{3x+2}, x \neq \dfrac{-2}{3}$
2. Jika $f(x) = \dfrac{3x-4}{-6x+2}, x \neq \dfrac{1}{3}$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-4}{-6x-3}, x \neq \dfrac{-1}{2}$
3. Jika $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x}, x \neq 0$ maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-0x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x + 0}$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}} = \frac{-4}{3x-6}, x \neq 2$$

4. Jika $f(x) = \dfrac{2}{\frac{2}{3}x + 4} = \dfrac{0x+2}{\frac{2}{3}x+4}, x \neq -6$

$$\text{maka} \quad f^{-1}(x) = \frac{-4x+2}{\frac{2}{3}x - 0} = \frac{-4x+2}{\frac{2}{3}x} = \frac{-12x+6}{2x} = \frac{-6x+3}{x}, x \neq 0$$

c). Menentukan rumus umum fungsi invers dari fungsi kuadrat.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

misal : $f(x) = y$

$y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow ax^2 + bx = y - c$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{y-c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad = \frac{4a\,(y-c)}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad = \frac{4ay - 4ac + b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad = \frac{4ay + b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{4ay + b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{4ay + b^2 - 4ac}{2a}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{-b \pm \sqrt{4ay + b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jadi, jika $f(x) = ax^2 + bx + c$,

maka $f^{-1}(x) = \dfrac{-b \pm \sqrt{4ax + b^2 - 4ac}}{2a}$

Invers fungsi akan merupakan fungsi jika dipenuhi syarat-syarat sebagai fungsi.

Contoh :

Jika $f(x) = x^2 + 2x - 3$ maka :

$$f^{-1}(x) = \frac{-2 \pm \sqrt{4x + 4 + 12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4x + 16}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4(x + 4)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{x + 4}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{x + 4}\ ,\ x \geq -4$$

Jadi fungsi inversnya adalah :

$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x + 4}\ ,\ x \geq -4$ atau

$f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x + 4}\ ,\ x \geq -4$

Catatan

> Jika suatu fungsi kuadrat dapat dinyatakan sebagai:
>
> 1. $f(x) = (x + p)^2 + q$, maka
>
> $f^{-1}(x) = -p \pm \sqrt{x - q}$
>
> 2. $f(x) = p(x + q)^2 + r$
>
> $f^{-1}(x) = -q \pm \sqrt{\dfrac{x - r}{p}}$

Contoh

1. Jika $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$ maka $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x + 4}\ ,\ x \geq -4$

   Jadi fungsi inversnya adalah : $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x + 4}\ ,\ x \geq -4$ atau

   $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x + 4}\ ,\ x \geq -4$

2. $f(x) = 4x^2 - 16x + 25 = 4(x^2 - 4x) + 25 = 4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25$

   $= 4(x^2 - 4x + 4) - 16 + 25$

   $= 4(x - 2)^2 + 9$

$$f^{-1}(x) = 2 \pm \sqrt{\frac{x-9}{4}}$$

$$= 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{x-9}\ , \quad x-9 \geq 0\ ,\ x \geq 9$$

Jadi fungsi inversnya adalah : $f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{x-9}\ ,\ x \geq 9$ atau

$f^{-1}(x) = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{x-9}\ ,\ x \geq 9$

d). Menentukan rumus umum fungsi invers dari fungsi dalam bentuk akar

$$f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$y = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$\Leftrightarrow y^n = ax + b$$

$$\Leftrightarrow ax = y^n - b$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y^n - b}{a}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y^n - b}{a}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^n - b}{a}$

$$\boxed{\text{Jika } f(x) = \sqrt[n]{ax+b}\text{, maka } f^{-1}(x) = \frac{x^n - b}{a}}$$

Contoh:

Tentukan rumus fungsi invers dari

1. $f(x) = \sqrt{x+3}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{2x-5}$
3. $f(x) = \sqrt[5]{-3x+4}$

Jawab

1. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 3}{1}$

   $= x^2 - 3$

2. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3 + 5}{2}$

3. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^5 - 4}{-3}$

   $= \dfrac{-x^5 + 4}{3}$

4. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g ditulis h = gof maka invers dari fungsi h adalah fungsi invers dari fungsi komposisi h dapat ditulis dengan notasi $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

Untuk menentukan fungsi $(g \circ f)^{-1}$ jika masing-masing fungsi f dan g diketahui, salah satu jalan yang dapat ditempuh dengan menentukan terlebih dahulu fungsi komposisi $g \circ f$ kemudian menetukan fungsi inversnya. Dapat juga karena dari sifat komposisi fungsi bahwa $(g \circ f)^{-1}$ adalah fungsi yang jika dikomposisikan dengan $g \circ f$ akan diperoleh fungsi identitas $I(x) = x$, yaitu $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = I$ sehinga akan kita dapatkan suatu sifat bahwa : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (Buktikan !)

Contoh :

Jika f dan g adalah fungsi pada R yang didefinisikan $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukan : a). f^{-1} dan g^{-1}

b). $g^{-1} \circ f^{-1}$ dan $f^{-1} \circ g^{-1}$

c). $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$

Jawab :

a). $f^{-1}(x) = x - 3$ dan $g^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$

b). $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x - 3) = \dfrac{(x-3)+1}{2} = \dfrac{x-2}{2}$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{x+1}{2} - 3 = \dfrac{x-5}{2}$

c). $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 3) = 2(x + 3) - 1 = 2x + 5$

Misalkan : $(g \circ f)(x) = y \Leftrightarrow 2x + 5 = y$

$\Leftrightarrow 2x = y - 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y-5}{2}$

$\Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

Jadi $(g \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1) + 3 = 2x + 2$

Misalkan $(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow 2x + 2 = y$

$\Leftrightarrow 2x = y - 2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y-2}{2}$

$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{2}$

Jadi $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{2}$

Latihan 2

1. Fungsi f : R→R dan g : R→R ditentukan oleh $f(x) = 3 - 2x$ dan $g(x) = x^2 + 1$

   d. Tentukan (gof)(2) dan (fog)(2)

   e. Tentukan rumus fungsi (gof)(x) dan (fog)(x)

   f. Jika (gof)(x) = 2 , tentukan x !

   g. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari gof dan fog

2. Fungsi f, g, h adalah terdefinisi pada bilangan real , yang didefinisikan $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$ dan $h(x) = x^2$

   a. Tentukan rumus fungsi (gof)(x) dan (fog)(x)
   b. Tentukan rumus fungsi $(gof)^{-1}(x)$ dan $(fog)^{-1}(x)$.
   c. Tentukan rumus fungsi komposisi (fogoh)(x) dan (hogof)(x)
   d. Carilah x sebagai peta dari (fogoh)(x) = 7 dan (hogof)(x) = 9

3. Diketahui fungsi linear $f(x) = ax + b$ dan fungsi kuadrat $g(x) = ax^2 + bx + c$ pada bilangan real

   a. Buktikan bahwa komposisi fungsi dari dua fungsi linear dari kedua urutan adalah juga fungsi linear
   b. Buktikan bahwa komposisi fungsi dari fungsi linear dan kuadrat dari kedua urutan adalah fungsi kuadrat

4. Tentukan fungsi invers dari :

   a). $f(x) = 3x + 5$ c). $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-6}$

   b). $f(x) = x^2 - 4x + 9$ d). $f(x) = \sqrt{x - \dfrac{2}{5}}$

5. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$ Tentukan nilai a, jika $f^{-1}(a) = -4$

BAB III

PERSAMAAN, PERTIDAKSAMAAN DAN GRAFIK FUNGSI

A. Persamaan , Pertidaksamaan Linier dan Grafiknya

Persamaan adalah kalimat terbuka yang mengandung hubungan " sama dengan " (" = ")

Sedangkan apabila menggunakan relasi " < , > , ≤, atau ≥ " dinamakan pertidaksamaan.

1. Persamaan Linier

Dari bentuk fungsi linier $f(x) = ax + b$, dengan a , b konstan dan $a \neq 0$, maka pembuat nol fungsi, yaitu $ax + b = 0$ merupakan bentuk umum persamaan linier dengan satu peubah. Untuk menyelesaikan persamaan digunakan sifat dasar bahwa :

Suatu persamaan tidak berubah himpunan penyelesaiannya, jika kedua ruas persamaan:

- ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama
- dikalikan atau dibagi dengan bilangan yang sama, asal bukan nol

Grafik fungsi linear berbentuk garis lurus dengan persamaan $y = ax + b$, dengan a , b konstan dan $a \neq 0$. Untuk menggambar grafik fungsi linier bisa dilakukan dengan dua cara yaitu dengan membuat tabel dan dengan menentukan titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y.

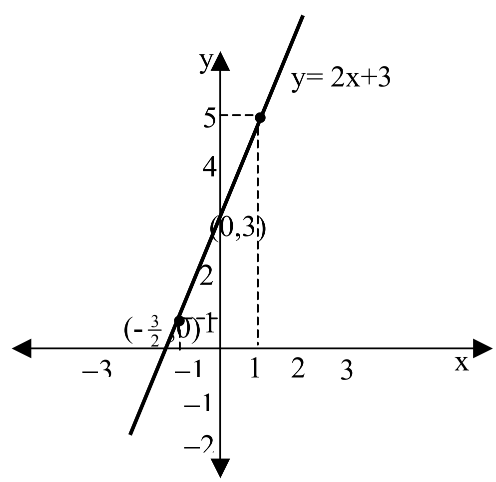
Contoh : Gambarlah grafik fungsi $y = 2x + 3$

Penyelesaian :

-Dengan membuat tabel :

$y = 2x + 3$

x	− 1	0	1
y	1	3	5



Dari tabel diperoleh titik-titik berupa pasangan koordinat, kemudian dihubungkan, sehingga tampak membentuk garis lurus.

-Dengan menentukan titik-titik potong dengan sumbu-x dan sumbu-y

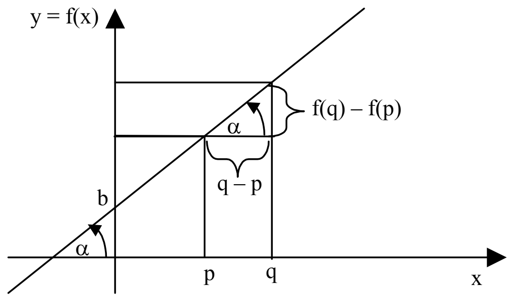
x	$-\frac{3}{2}$	0
y	0	3

Kedua titik potong tersebut digambar dalam bidang K

artesius kemudian dihubungkan sehingga tampak membentuk garis lurus.

Persamaan Garis Lurus

Perhatikan grafik berikut :



$$
\begin{aligned}
f(x) = ax + b \rightarrow f(p) &= ap + b \\
f(q) &= aq + b \\
\hline
f(q) - f(p) &= a(q-p)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{f(q) - (f(p)}{q - p} = a = \tan\alpha$, disebut gradien dari garis y = ax + b tersebut.

Dari jabaran di atas tampak bahwa gradien tersebut merupakan nilai perbandingan antara selisih komponen y dan x dari dua sebarang dua titik pada garis tersebut. Jika persamaan garis y = ax + b maka gradiennya adalah a dan melalui titik (0,b).

Secara umum sebuah garis lurus (yang tidak sejajar atau berimpit dengan sumbu Y) persamaannya adalah y = mx + n. dengan m adalah gradien (koefisien arah) garis yang menunjukkan kecondongan garis. Garisnya condong ke kanan jika dan hanya jika m > 0 dan condong ke kiri jika dan hanya jika m < 0.

Jika garis y = mx + n melalui titik (x_1, y_1), maka dipenuhi $y_1 = mx_1 + n$ diperoleh:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ yaitu persamaan garis melalui (x_1, y_1) dengan gradien m.

Jika garis itu juga melalui titik (x_2, y_2) maka $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Leftrightarrow m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Jika nilai m tersebut disubstitusikan ke persamaan itu maka diperoleh:

$\mathbf{y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)} \Leftrightarrow \mathbf{\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$ yang merupakan persamaan garis melalui dua titik (x_2, y_2) dan (x_1, y_1).

Persamaan garis juga dapat dinyatakan dalam bentuk implisit: Ax + By + C = 0 yang ekuivalen dengan $y = -\dfrac{A}{B}x + \dfrac{C}{A}$ dengan gradien $m = -\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$.

Untuk setiap pasang garis $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, maka:

1) $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ $\Leftrightarrow$ g_1 dan g_2 berpotongan pada sebuah titik.

2) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ $\Rightarrow$ $g_1 // g_2$ (sejajar) $\Leftrightarrow$ tidak ada titik persekutuan

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ $\Rightarrow g_1 = g_2$ (berimpit) $\Leftrightarrow$ ada tak berhingga titik persekutuan

Dari pengertian tersebut maka :

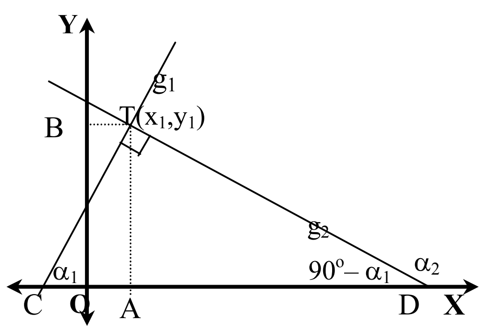
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Dari hubungan tersebut diperoleh:

i) $m_1 = m_2 \Rightarrow g_1 // g_2$ atau $g_1 = g_2$.

atau: $g_1 // g_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ dan $g_1 = g_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

ii)



Misalkan g_1 dan g_2 adalah dua garis yang masing-masing tidak sejajar sumbu koordinat dan keduanya saling tegak lurus.

g_1 : $y = m_1x + n_1$ memotong sumbu X di titik $C(-\frac{n_1}{m_1},0)$ dan g_2 memotong sumbu X di titik $D(-\frac{n_2}{m_2},0)$.

Misalkan kedua garis berpotongan di $T(x_1, y_1)$, maka diperoleh $y_1 = m_1x_1 + n_1$ dan $y_1 = m_2x_1+n_2$.

Sedangkan ΔTAC dan ΔDAT sebangun, sehingga AC : TA = TA : AD.

Diperoleh: $(x_1 - (-\frac{n_1}{m_1})) : y_1 = y_1 : (-\frac{n_2}{m_2} - x_1)$

$$\Leftrightarrow y_1^2 = -\frac{(m_1x_1+n_1)(m_2x_1+n_2)}{m_1m_2}$$

$$= -\frac{y_1 \times y_1}{m_1m_2} \text{ berarti: } m_1m_2 = -1$$

Jadi untuk setiap g_1 dan g_2 yang tidak sejajar atau berimpit sumbu koordinat maka :

$g_1 \perp g_2$ (tegak lurus) $\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$

2. Pertidaksamaan linier

Suatu bilangan a disebut lebih besar dari pada bilangan b jika $a - b > 0$ dan a disebut lebih kecil dari pada b jika $a - b < 0$. Untuk menyelesaikan pertidaksamaan digunakan sifat-sifat bahwa :

- Ruas – ruas suatu pertidaksamaan boleh ditambah atau dikurangi dengan bilangan yang sama

- Ruas – ruas suatu pertidaksamaan boleh dikalikan atau dibagi dengan bilangan positif yang sama
- Jika ruas – ruas suatu pertidaksamaan dikalikan atau dibagi dengan bilangan negatif yang sama, maka tanda pertidaksamaannya harus dibalik
- Jika a dan b bilangan positif dan $a < b$, maka $a^2 < b^2$

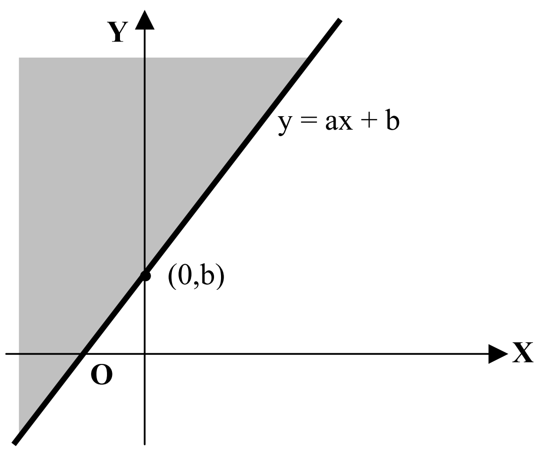
Contoh :

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan : $a^2x - 4 < 4a^2 - x$

Jawab :

$(a^2 + 1)\, x < 4\, (a^2 + 1) \Rightarrow x < 4$ (membagi $a^2 + 1$ diperkenankan karena selalu positif)

Untuk menggambar grafik dari pertidaksamaan linear dijelaskan sebagai berikut :

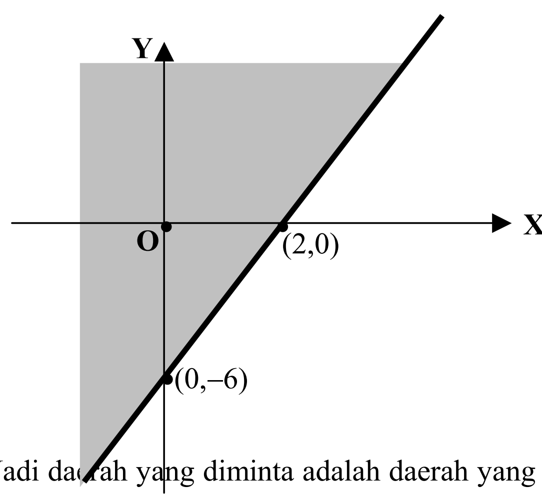


Garis $y = ax + b$ akan membagi bidang Kartesius menjadi tiga bagian yakni : $\{(x,y) \mid y < ax + b\}$ $\{(x,y) \mid y = ax + b\}$, dan $\{(x,y) \mid y > ax + b\}$, atau daerah di sebelah bawah, garis itu sendiri dan daerah di sebelah atas garis $y = ax + b$.

Contoh :Arsirlah daerah yang menjadi tempat kedudukan titik-titik yang dapat ditunjukkan dengan $\{(x,y) \mid y \geq 3x - 6\}$

Jawab :

Gambarlah garis $y = 3x - 6$.



$y = 3x - 6$

x	0	2
y	–6	0
(x,y)	(0,–6)	(2,0)

Untuk mencari daerah, ujilah salah satu titik. misalkan titik O(0,0) :

$(0,0) \rightarrow y = 3x - 6 \rightarrow 0 > 3.0 - 6$, (dipenuhi)

Jadi daerah yang diminta adalah daerah yang memuat O(0,0), sebagaimana daerah yang diarsir di atas.

B. Persamaan Kuadrat dan Grafik Fungsi Kuadrat

1. Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$

Setiap pengganti x yang memenuhi persamaan dinamakan penyelesaian atau akar persamaan tersebut. Akar-akar persamaan kuadrat dapat dicari dengan:

- pemfaktoran
- melengkapi bentuk kuadrat sempurna
- Rumus abc: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Apabila $ax^2 + bx + c = 0$ akar-akarnya x_1 dan x_2 maka sifat-sifat akar persamaan kuadrat dapat dirumuskan :

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ dan $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$ serta $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}$ (Buktikan !)

Untuk menyusun persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya diketahui dengan sifat-sifat di atas, karena persamaan kuadrat tersebut dapat dirumuskan :

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{jumlah akar}} x + \underbrace{x_1.x_2}_{\text{hasil kali akar}} = 0$$

Contoh :

1). Selisih akar – akar persamaan $x^2 - ax + 24 = 0$ adalah 5. Tentukan a !

Jawab :

Misalkan akar-akar persamaan x_1 dn x_2 maka :

$x_1 - x_2 = 5$ …………1)

$x_1 + x_2 = a$ …………..2)

$x_1.x_2 = 24$ …………3)

Dengan menjumlahkan dan mengurangkan 1) dan 2) di dapat :

$x_1 = \dfrac{1}{2}(a + 5)$ dan $x_2 = \dfrac{1}{2}(a - 5)$ substitusi ke 3) maka

$x_1.x_2 = 24 \Rightarrow \dfrac{1}{4}(a^2 - 25) = 24$

$\Leftrightarrow a^2 - 25 = 96$

$\Leftrightarrow a^2 = 121$ Jadi a = 11 atau a = - 11

2). Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya kebalikan dari akar-akar persamaan $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$

Jawab:

$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ akar-akarnya x_1 dan x_2 didapat : $x_1 + x_2 = 3a$ dan $x_1.x_2 = 2a^2$

maka persamaan kuadrat barunya :

Jumlah akar : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3a}{2a^2}$ dan hasil kali akar : $\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2} = \frac{1}{2a^2}$

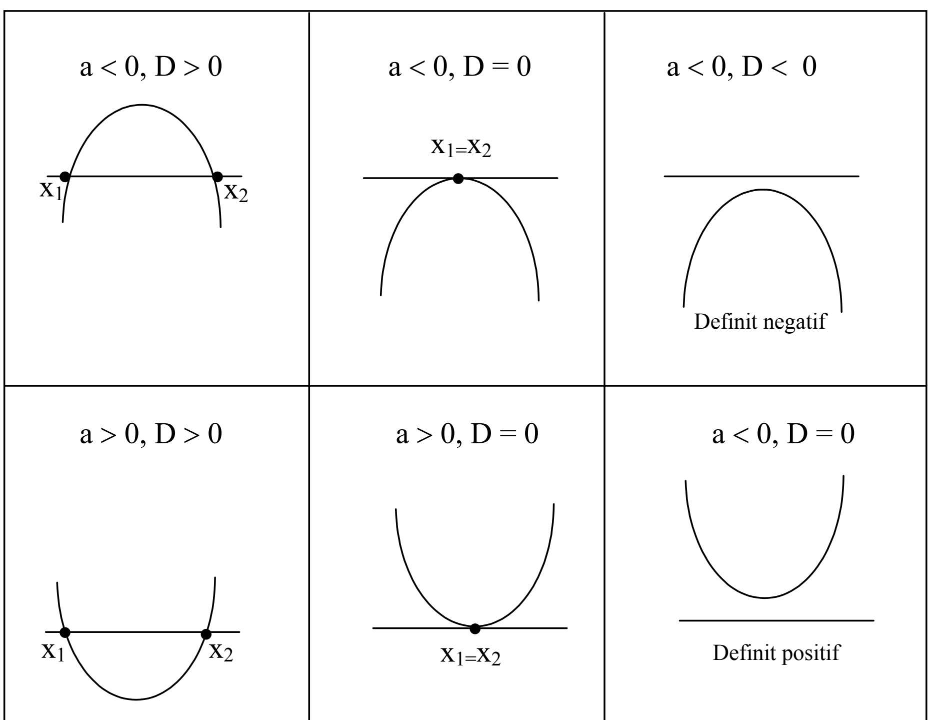
Jadi persamaan kuadrat baru :

$x^2 - (\frac{3a}{2a^2})x + \frac{1}{2a^2} = 0$ atau $2a^2x^2 - 3ax + 1 = 0$

2. Grafik Fungsi Kuadrat

Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$. Jika $a > 0$, parabola terbuka ke atas sehingga mempunyai titik balik minimum, dan jika $a < 0$ parabola terbuka ke bawah sehingga mempunyai titik balik maksimum.

Jika ditinjau dari nilai a dan D (diskriminan $D = b^2 - 4ac$) maka sketsa grafik parabola sebagai berikut:



Langkah-langkah dalam menggambar grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$

2. Tentukan pembuat nol fungsi $\rightarrow$ y = 0 atau f(x) = 0

Pembuat nol fungsi dari persamaan $y = ax^2 + bx + c$ diperoleh jika $ax^2 + bx + c=0$. Sehingga diperoleh nilai x yang memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$ Nilai ini tidak lain adalah absis titik potong dengan sumbu-x, sedangkan untuk menentukan titik potong dengan sumbu-y, dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x tadi pada persamaan kuadrat semula.

3. Tentukan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$

4. Tentukan titik puncak P (x,y) dengan $x = \frac{-b}{2a}$ dan $y = \frac{D}{-4a}$

5. Gambarlah sketsa grafiknya

Contoh :

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian :

a. Menentukan pembuat nol fungsi, dengan pemfaktoran diperoleh :

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = 5$$

b. Menentukan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$

c. Menentukan titik puncak P (x,y)

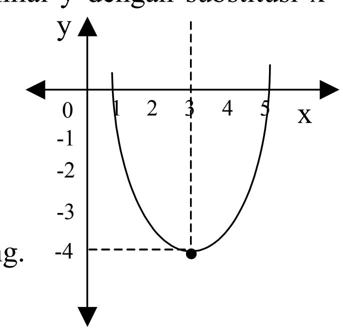
Karena nilai x sudah diperoleh maka tinggal mencari nilai y dengan substitusi x = 3 pada fungsi semula

$$y = 3^2 - 6(3) + 5$$

$$= 9 - 18 + 8 = -4$$

Jadi puncak parabola adalah titik (3, –4)

sehingga sketsa grafiknya seperti pada gambar di samping.



C. Pertidaksamaan Kuadrat dan Pecah

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan ini langkah-langkahnya :

- Jadikan ruas kanan nol
- Uraikan bentuk itu atas faktor-faktor linear dan tentukan harga-harga nolnya
- Harga nol itu dilukis pada garis bilangan, kemudian periksa dengan sebarang nilai misal nol untuk menetapkan tanda " + " atau " – "

Contoh :

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan :

1). $x (x + 1) < 7x^2 - 12$

2). $(x - 1)^2 (x + 5) (x - 3)^3 < 0$

3). $\dfrac{2x+7}{x-1} \le 1$

Jawab :

1). $x (x + 1) < 7x^2 - 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 7x^2 + 12 < 0$

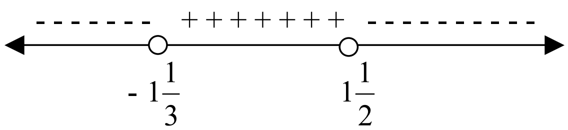
$\Leftrightarrow -6x^2 + x + 12 < 0$

$\Leftrightarrow (-2x + 3) (3x + 4) < 0$

- dicari harga nol dari $(-2x + 3) (3x + 4) = 0$

  didapat $x = -1\frac{1}{3}$ dan $x = 1\frac{1}{2}$

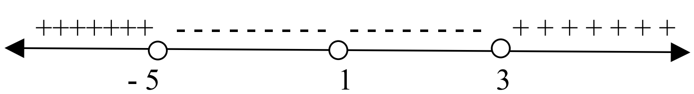
- pada garis bilangan kita tetapkan tanda-tandanya :



Jadi nilai x yang memenuhi adalah : $x < -1\frac{1}{3}$ atau $x > 1\frac{1}{2}$

2). $(x - 1)^2$ selalu positif, karena suatu kuadrat

$(x - 3)^3$ selalu berubah-ubah, dengan jalan sama seperti $(x + 5)$ karena pangkat ganjil sehingga pada garis bilangan kita tetapkan tanda-tandanya



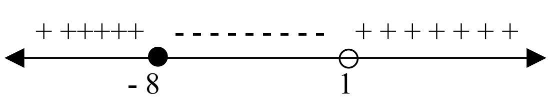
Jadi nilai x yang memenuhi adalah : $-5 < x < 3$ kecuali $x = 1$

3). $\dfrac{2x+7}{x-1} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+7}{x-1} - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+8}{x-1} \le 0$

Bila kedua ruas dikalikan $(x - 1)^2$, maka tidak merubah tanda pertidaksamaannya

$\Leftrightarrow (x + 8)(x - 1) \le 0$



Jadi nilai x yang memenuhi adalah : $-8 \le x < 1$

Latihan 3

1. Tentukan akar-akar persamaan :

a. $9x^2 - 18x$

b. $(x - 3)^2 + 2(x - 3) - 3 = 0$

c. $\frac{x - 6}{2x - 3} - \frac{x+3}{x+1} = 1$

2. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 8x + k = 0$ adalah x_1 dan x_2. Tentukan k dan akar-akar persamaan itu jika :

   a. $3x_1 = 4x_2 + 3$

   b. $x_1^2 + x_2^2 = 40$

3. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari $x^2 - 3x + 1 = 0$. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya $\frac{1}{x_1 + 2}$ dan $\frac{1}{x_2 + 2}$

4. Tentukan persamaan garis g yang melalui A (3,1) dan tegak lurus garis BC dimana titik B (2,3) dan C (6,5).

5. Ditentukan garis $g \equiv x - 2y = 4$ dan parabola $y = x^2 - 2$. Tentukan persamaan garis singgung pada parabola itu dan yang sejajar dengan garis g , tentukan pula koordinat titik singgungnya.

6. Tentukan persamaan parabola yang melalui titik A(1,1), B(-1,-1), dan C(-3,0)

7. Tentuka nilai x yang memenuhi pertidaksamaan :

   a. $\frac{2x - 3}{5} < 7$

   d. $\frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} \le 2$

   b. $\frac{2x - 1}{x + 2} > 1$

   e. $|x^2 - 3| < 1$

   c. $15 - 7x \le 2x^2$

   f. $(x^2 - 1) (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \ge 0$

8. Pertidaksamaan $3x - a > \frac{x - 1}{5} + \frac{ax}{2}$ dipenuhi oleh $x < -3$, berapakah nilai a

9. Diantara batas-batas manakah letaknya pecahan $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2}$

10. Keuntungan harian L(x) dalam ratusan ribu rupiah diperoleh dengan produksi x satuan barang per hari dinyatakan dengan $L(x) = - 3x^2 + 30x - 36$. Tentukan banyak produksi setiap harinya agar produsen itu memperoleh keuntungan maksimum. Berapa keuntungan maksimum setiap harinya?

BAB IV
FUNGSI PECAH DAN GRAFIKNYA

A. Pengertian Fungsi Pecah

Selain dikenal fungsi linear dan fungsi kuadrat yang telah dibicarakan di atas , dikenal pula jenis fungsi yang disebut fungsi pecah. Fungsi pecah kadang-kadang juga disebut sebagai fungsi rasional (rational functions).

Fungsi pecah dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh f (x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q (x) yang merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) $\neq$ 0 pada domainnya.

Misalnya, f(x) = $\frac{5}{x}$, f(x) = $\frac{x^2+4x+3}{3x-5}$ dan f(x) = $\frac{x^2+4x+3}{x^2+3x-5}$

B. Nilai Nol Fungsi Pecah

Jika diketahui fungsi f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai -nilai x yang menyebabkan f(x)= 0 disebut nilai nol dari fungsi f(x). Nilai nol disebut juga pembuat nol atau harga nol. Dapat dibuktikan bahwa jika f(x) = 0, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi f(x)= $\frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan P(x)= 0.

Namun perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan P(x) = 0 belum tentu merupakan nilai nol fungsi f(x). Ini terjadi jika nilai x tersebut ternyata juga membuat Q(x)= 0. Untuk x yang bersama-sama membuat P(x) dan Q(x) bernilai nol menyebabkan f(x) mempunyai nilai tak tentu. Misalnya, pada f(x) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, nilai x = 1 bukan nilai nol dari fungsi f(x) sekalipun untuk P(x) = x^2+ x - 2 berlaku P(1)= 0. Ini karena juga berlaku Q(1)= 0, sehingga f(1) bernilai tak tentu.

Tentu saja tidak setiap fungsi pecah mempunyai nilai nol. Ini terjadi kalau P(x) tidak mungkin berharga nol.

Seperti diketahui, nilai nol suatu fungsi berkaitan dengan koordinat titik potong grafik dengan sumbu X. Jadi, jika x = a adalah nilai nol dari fungsi f(x), maka (a,0) adalah koordinat titik potong grafik dengan sumbu X.

Contoh 1:

Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{3x - 5}$. Nilai nol dari fungsi tersebut dapat dicari sebagai berikut.

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = -3$

Jadi, nilai nol dari fungsi tersebut adalah x = -1 dan x = -3 dan grafik fungsi f(x) memotong sumbu X di titik (-1,0) dan (-3,0).

Jika pada fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dan P(x) dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$. Ini berarti ada atau tidaknya nilai nol fungsi f(x) tergantung kepada diskriminan dari persamaan kuadrat.

Contoh 2 :

Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{3x - 5}$. Pada fungsi itu, nilai diskriminan dari persamaan $x^2+4x+8 = 0$ adalah $D = 4^2 - (4)(1)(8) = 16 - 32 = -16 < 0$

Karena $D < 0$, maka $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{3x - 5}$ tidak mempunyai nilai nol. Ini berarti juga grafik f(x) tidak memotong sumbu X.

C. Grafik Fungsi Pecah

Di sini akan dibahas grafik fungsi pecah yang berbentuk :

1. $\mathbf{f(x) = \frac{ax + b}{px + q}}$ **dengan $p \neq 0$**
2. $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{ax + b}}{\mathbf{px^2} + qx + r}$ **dengan $p \neq 0$**
3. $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{ax^2} + bx + c}{px + q}$ **dengan $a \neq 0$ dan $p \neq 0$**
4. $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{ax^2} + bx + c}{px^2 + qx + r}$ **dengan $a \neq 0$ dan $p \neq 0$**

Langkah-langkah mensketsa grafik fungsi pecah :

- Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
- Menentukan asimptot datar, tegak dan miring

- Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
- Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah bentuk no.2, 3 dan 4)
- Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
- Mensketsa kurvanya

Jenis-jenis asimptot fungsi pecah :

- Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
- Asimptot datar, diperoleh bila $x \to \sim$
- Asimptot miring, hanya untuk jenis fumgsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya (khusus fungsi rasional bentuk 3)

1. Fungsi $f(x) = \dfrac{ax+b}{px+q}$

Contoh 1

Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Langkah-langkah mensketsa :

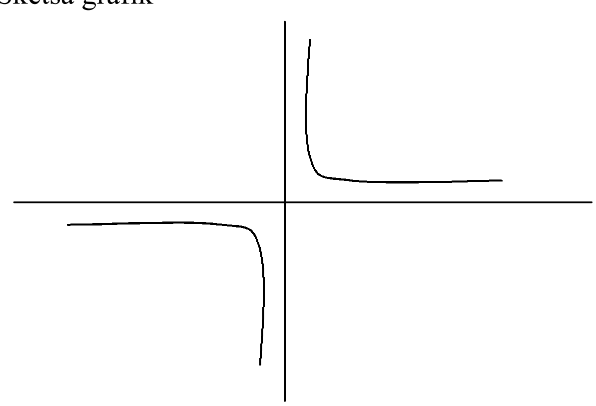
1. Titik potong sumbu x dan sumbu y tidak ada
2. Asimptot-asimptot : tegak : garis x = 0

   datar : untuk $x \to \sim$ diperoleh y = f(x) = 0

   Jadi garis y = 0 sebagai asimptot datar
3. Titik-titik bantu :

x	-1	-2	-3	-4	-5	1	2	3	4	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

4. Sketsa grafik



Contoh 2

Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

Langkah-langkah:

1. titik-titik potong dengan

   sumbu x, syarat $f(x) = y = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

   titik potong $(-\frac{2}{3}, 0)$

   sumbu y, syarat $x = 0 \Rightarrow f(x) = y = 2$

   titik potong (0,2)

2. asimptot

   tegak : $x + 1 = 0$

   garis $x = -1$ sebagai asimptot tegak

   datar : $f(x) = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{x(3+\frac{2}{x})}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

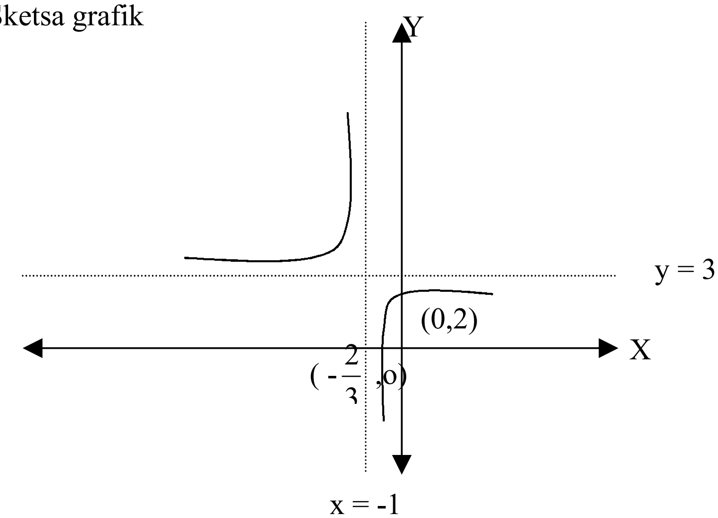
   untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ dan $\frac{2}{x} \to 0$

   Jadi asimptot datar: garis $y = \frac{3+0}{1+0} = 3$

3. titik-titik bantu

x	-2	-3	-4	1	2	3
y	4	3,5	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{4}$

4. Sketsa grafik



Catatan :

- asimptot datar grafik $y = \dfrac{ax+b}{px+q}$ adalah $y = \dfrac{a}{p}$
- grafik $y = \dfrac{1}{x-a}$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = \dfrac{1}{x}$ sebanyak a satuan ke kanan
- grafik $y = a + \dfrac{1}{x}$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = \dfrac{1}{x}$ sebanyak a satuan ke atas

2. Fungsi $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{px^2+qx+r}}$

Contoh 1 : Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$

Langkah-langkah :

a. titik-titik potong dengan

   sumbu x adalah (0,0)

   sumbu y adalah (0,0)

b. asimptot-asimptot :

   - tegak, syarat penyebut sama dengan nol

     $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -1$

     Jadi garis x = -1 dan x = 2 sebagai asimptot tegak

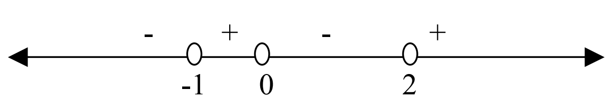
   * datar $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$

   Jika x $\rightarrow$ ~ maka $\dfrac{1}{x} \rightarrow 0$. Jadi asimptot datar adalah garis y = 0 atau sumbu x

c. asimtot tegak dan titik potong dengan sumbu x membagi sumbu x menjadi 4 interval

   yaitu : $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 2$ dan $x > 2$

   tanda-tanda $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$ pada tiap interval adalah sebagai berikut :



   Tanda + menyatakan grafik terletak di atas sumbu x pada interval itu

Tanda - menyatakan grafik terletak di bawah sumbu x pada interval itu

d. Nilai ekstrim fungsi

Misalkan y = (x) mempunyai nilai ekstrim, maka :

$$p = \frac{x}{x^2 - x - 2} \quad \Leftrightarrow px^2 - px - 2p - x = 0$$

$$\Leftrightarrow px^2 + (-p - 1)x - 2p = 0$$

syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar $D \geq 0$

sehingga : $(-p - 1)^2 - 4p(-2p) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 + 2p + 1\ 8p^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9p^2 + 2p + 1 \geq 0$$

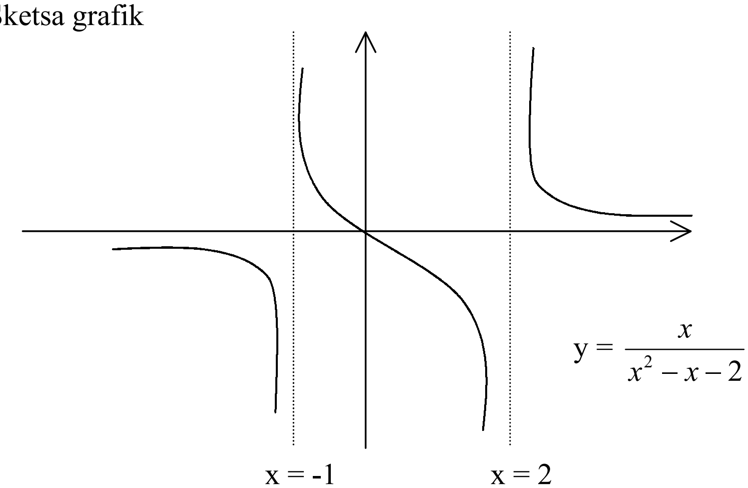
Penyelesaian pertidaksamaan adalah semua $p \in R$ (karena bentuk $9p^2 + 2p + 1$ adalah definit positif). Dengan demikian titik ekstrim tidak ada .

Catatan : Nilai ektrim dapat juga ditentukan dengan menggunakan f'(x) = 0

e. Titik – titik Bantu

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$
y	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{10}{27}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{14}{27}$

f. Sketsa grafik



Contoh 2 : Sketsa grafik $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 5x + 4}$

Langkah – langkah :

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot :

- tegak, diperoleh bila $x^2 + 5x + 4 = 0$

$$(x + 4)(x + 1) = 0$$

$$x = -4 \text{ atau } x = -1$$

asimptot tegak adalah garis x = -4 dan x = -1

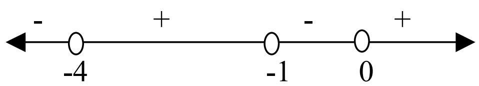
- datar, $f(x) = y = \dfrac{3x}{x^2 + 5x + 4} = \dfrac{x^2(\frac{3}{x})}{x^2(1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2})} = \dfrac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}$

  untuk $x \to \sim$ maka $\dfrac{1}{x} \to 0$ Sehingga $y = \dfrac{3.0}{1 + 5.0 + 4.0} = \dfrac{0}{1} = 0$

  Jadi asimptot datar garis y = 0

3. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik potong sumbu x dan asimptot tegak.

   Tentukan tanda f (x) untuk masing-masing interval



4. Nilai ekstrim

   Misal f (x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian $p = \dfrac{3x}{x^2 + 5x + 4}$

   $\Leftrightarrow px^2 + 5px + 4p - 3x = 0$

   $\Leftrightarrow px^2 + (5p - 3)x + 4p = 0$

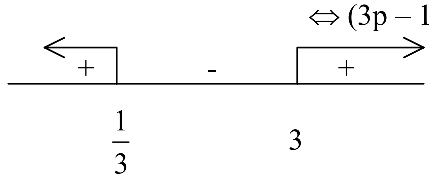
   Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar $D \geq 0$ sehingga :

   $(5p - 3)^2 - 4p\,(4p) \geq 0 \;\Leftrightarrow 25p^2 - 30p + 9 - 16p^2 \geq 0$

   $\Leftrightarrow 9p^2 - 30p + 9 \geq 0$

   $\Leftrightarrow 3p^2 - 10p + 3 \geq 0$

   $\Leftrightarrow (3p - 1)\,(p - 3) \geq 0$



   $p = y \leq \dfrac{1}{3}$ atau $p = y \geq 3$

   Ini menujukkan nilai ekstrim minimum y = 3 dan nilai ekstrim maksimum $y = \dfrac{1}{3}$

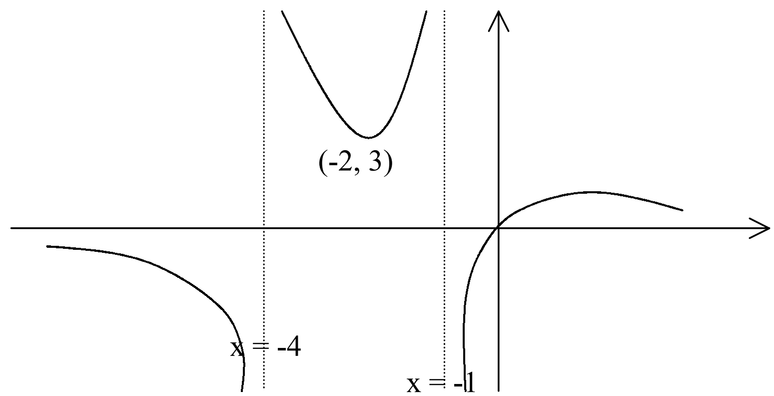
   Untuk menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam f (x), diperoleh: titik ekstrim minimum (-2, 3) dan titik ekstrim maksimum $(2\,,\,\dfrac{1}{3})$

5. Titik-titik bantu

x	-6	-5	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	2	3

y $-1\frac{4}{5}$ $-3\frac{3}{4}$ $4\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{3}$ $3\frac{3}{5}$ $3\frac{3}{5}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{9}{28}$

6. Sketsa grafik



Grafik $y = \dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$ selalu mempunyai asimptot datar sumbu x

3. Fungsi $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$

Contoh 1 : Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

Langkah – langkah :

1. titik potong sumbu x adalah (-2 , 0) dan (2, 0)

   titik potong sumbu y adalah (0,4)

2. asimptot – asimtot :

- asimptot datar tidak ada

* tegak : $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, Garis $x = 1$ sebagai asimptot tegak

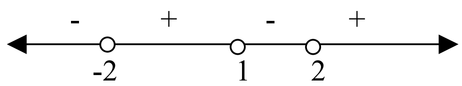
* miring : diperoleh dari hasil bagi pembilang terhadap penyebut

$$
\begin{array}{r|l}
x-1 & x^2-4 \quad x+1 \\
 & x^2 - x \\
 & \quad x-4 \\
 & \quad x-1 \\
 & \quad\quad -3
\end{array}
$$

Dengan demikian $f(x) = y = \dfrac{x^2-4}{x-1} = x+1-\dfrac{3}{x-1}$

Bila x menjadi sangat besar maka $\dfrac{3}{x-1}$ akan mendekati 0. Ini berarti y mendekati $y = x + 1$ yang merupakan asimptot miring

3. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik – titik potong dengan sumbu x dan asimptot tegak. Tanda nilai f (x) untuk interval – interval tersebut :



4. Nilai ekstrim

Misal y = p diperoleh

$p = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \quad \Leftrightarrow px - p = x^2 - 4$

$\Leftrightarrow x^2 - px + p - 4 = 0$

Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar – akar D ≥ 0 , sehingga :

$p^2 - 4\,(4p - 4) \geq 0$

$\Leftrightarrow p^2 - 4p + 16 \geq 0$

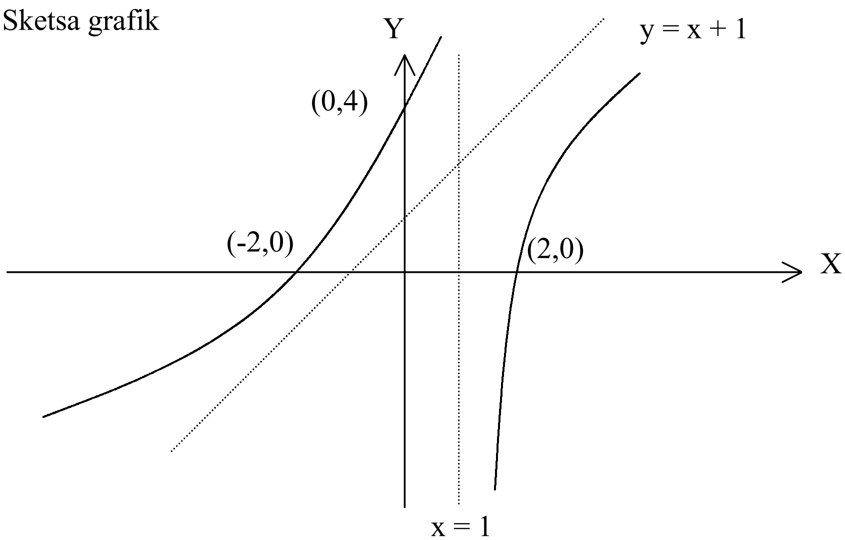
Penyelesaian pertidaksamaan ini adalah setiap $p \in R$ (karena bentuk di atas adalah definit positif)

Jadi tidak ada nilai ekstrim

5. Titik – titik bantu :

x	-5	-4	-3	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	4	5
y	$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{2}{5}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{7}{10}$	$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	4	$5\frac{1}{4}$

6. Sketsa grafik



4. Fungsi $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

Contoh 1 :Sketsalah grafik $f(x) = \dfrac{6x^2}{3x^2 + 1}$

Langkah – langkah :

1. Titik potong sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot

- tegak : tidak ada
- datar : f (x) = y = $\dfrac{6x^2}{3+\frac{1}{x^2}}$

untuk x $\rightarrow$ ~ maka $\dfrac{1}{x} \rightarrow 0$ Jadi garis y = $\dfrac{6}{3+0}$ = 2 merupakan asimptot datar.

3. f (x) selalu bertanda positif untuk x < 0 maupun x > 0
4. Nilai ekstrim

Misal f (x) = y mempunyai nilai ekstrim p. Jadi p = $\dfrac{6x^2}{3x^2+1}$

$\Leftrightarrow 3px^2 + p - 6x^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3p - 6)x^2 + p = 0$

Syarat supaya persamaan kuadrat mempunyai akar – akar $D \geq 0$

Jadi $-4(3p - 6)p \geq 0$

$\Leftrightarrow -12p^2 + 24p \geq 0$

$\Leftrightarrow 12p\,(-p + 2) \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$$

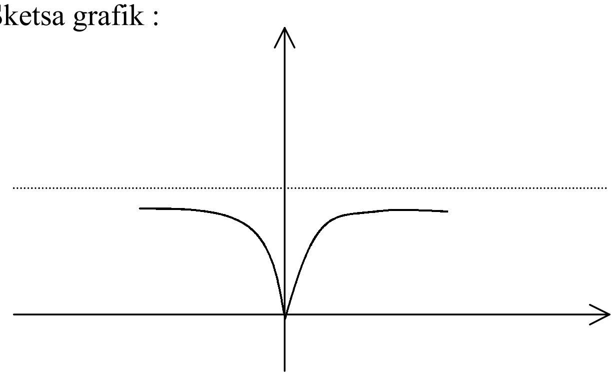
Jadi $0 \leq p \leq 2$ atau $0 \leq y \leq 2$

Ini menyatakan nilai y terletak dalam interval 0 sampai 2. Nilai y minimum adalah 0. titik minimum (0,0). Grafik tidak memiliki nilai maksimum

5. Titik – titik bantu

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{27}{14}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{27}{14}$

Sketsa grafik :



Latihan 4

1. Diketahui f(x) = $\frac{2x+5}{x-1}$

   a. Carilah titik potong grafik dengan sumbu X, titik potong grafik dengan sumbu Y, asimtot mendatar, dan asimtot tegaknya.

   b. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut tidak mempunyai titik balik.

   c. Sketsalah grafiknya.

2. Tentukan asimtot-asimtot grafik fungsi f(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$, jika grafiknya melalui titik-titik (0,1), (3,2), dan (4,3).

3. Grafik y = $\frac{ax+b}{cx+d}$ melalui titik (-1,4) dan mempunyai asimtot-asimtot x = - $\frac{1}{2}$ dan y = $\frac{1}{2}$. Tentukan rumus fungsinya.

4. Diketahui fungsi f(x) = $\frac{1}{x^2+5x+4}$. Tentukan :

   a. titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat

   b. asimtot-asimtotnya

   c. titik balik dan jenisnya

   d. sketsalah grafiknya

5. Seperti soal no 4 untuk fungsi f(x) = $\frac{x-1}{x^2-2x-3}$.

6. Grafik y = $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ memotong sumbu X di titik-titik (-3,0) dan (2,0) dan mempunyai asimtot garis-garis x = 1, x = - 4 dan y = $\frac{1}{2}$. Tentukan rumus fungsinya.

7. Grafik y = $\frac{ax^2+bx+c}{px\ \ +q}$ memotong sumbu-sumbu koordinat di titik-titik (3,0), (-5,0) dan (0,5). Grafik fungsinya mempunyai asimtot garis x = -3. Tentukan rumus fungsinya.

8. Fungsi f(x) = $\frac{x^2+px+q}{x-1}$ mempunyai nilai balik 3 dan 7. Hitung p dan q.

9. Grafik f(x) = $\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ hanya mempunyai asimtot tegak x = -1, melalui titik (-3,-2) dan mempunyai titik balik (1,2). Tentukan rumus fungsi itu.