PELATIHAN INSTRUKTUR/PENGEMBANG SMU

28 JULI s.d. 10 AGUSTUS 2003

FUNGSI PECAHAN DAN FUNGSI/PERSAMAAN/ PERSAMAAN MODULUS

Oleh:

Al. Krismanto, M. Sc.

Widyaiswara PPPG Matematika

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2003

BAGIAN I
PEMBELAJARAN FUNGSI PECAH

A. SUKU BANYAK

Sebelum membicarakan fungsi pecah, ada baiknya dimengerti dulu mengenai apa yang disebut dengan suku banyak. Suku banyak disebut pula polinomial. Pada paket ini hanya dibicarakan suku banyak dalam satu peubah.

Bentuk umum dari suku banyak adalah sebagai berikut:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + a_4x^{n-4} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ dengan $a_0 \neq 0$

Bilangan n disebut derajat suku banyak. Bilangan-bilangan $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ disebut koefisien-koefisien suku banyak.

Jika koefisien-koefisien suku banyak merupakan bilangan-bilangan nyata, maka suku banyaknya disebut suku banyak nyata (*real polynomials*). Jika koefisien-koefisien suku banyak merupakan bilangan-bilangan rasional, maka suku banyaknya disebut suku banyak rasional (*rational polynomials*). Dalam paket ini yang dibicarakan adalah suku banyak rasional.

Mirip dengan fungsi, suku banyak sering dinyatakan dengan P(x), Q(x), dan sebagainya.

Contoh 1.1

a. $x + 4$, $3x - 2$, dan semacamnya adalah suku banyak berderajat 1.
b. $2x^2 - 5$, $x^2 + 4x - 5$, dan semacamnya adalah suku banyak berderajat 2.

B. FUNGSI PECAH

Selain dikenal fungsi linear dan fungsi kuadrat yang telah disinggung pada Bagian II, dikenal pula jenis fungsi yang disebut fungsi pecah. Fungsi pecah kadang-kadang juga disebut sebagai fungsi rasional (*rational functions*).

Fungsi pecah dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q(x) yang merupakan suku banyak dalam x dan $Q(x) \neq 0$ pada domainnya.

Contoh 1.2

Contoh-contoh fungsi pecah adalah sebagai berikut.

$f(x) = \frac{5}{x}$, $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$, $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{3x-5}$, dan $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x-5}$

C. NILAI NOL FUNGSI PECAH

Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai (nilai-nilai) x yang menyebabkan $f(x) = 0$ disebut nilai nol dari fungsi f(x). Nilai nol disebut juga pembuat nol atau harga nol. Dapat dibuktikan bahwa jika $f(x) = 0$, maka juga $P(x) = 0$. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan $P(x) = 0$.

Namun perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan $P(x) = 0$ belum tentu merupakan nilai nol fungsi f(x). Ini terjadi kalau nilai x tersebut ternyata juga membuat $Q(x) = 0$. Untuk x yang bersama-sama membuat P(x) dan Q(x) bernilai nol menyebabkan f(x) mempunyai nilai tak tentu.

Misalnya, pada $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, nilai $x = 1$ bukan **nilai nol** (**pembuat nol**) dari fungsi f(x) sekalipun untuk $P(x) = x^2 + x - 2$ berlaku $P(1) = 0$. Ini karena juga berlaku $Q(1) = 0$, sehingga f(1) bernilai tak tentu. Tidak setiap fungsi pecah mempunyai nilai nol. Ini terjadi kalau P(x) tidak mungkin bernilai nol.

Seperti diketahui, nilai nol suatu fungsi berkaitan dengan koordinat titik potong grafik dengan sumbu X. Jadi, kalau x = a adalah nilai nol dari fungsi f(x), maka (a, 0) adalah koordinat titik potong grafik dengan sumbu X.

Contoh 1.3

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{3x - 5}$. Nilai nol dari fungsi tersebut dapat dicari sebagai berikut.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = -3$$

Jadi, nilai nol dari fungsi tersebut adalah x = −1 dan x = −3 dan grafik fungsi f(x) memotong sumbu X di titik (−1,0) dan (−3,0).

Jika pada fungsi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P(x) adalah suku banyak berderajat dua dalam bentuk $ax^2 + bx + c$, maka nilai nol fungsi f(x) dicari dari persamaan kuadrat P(x) = 0 atau persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Ini berarti ada atau tidaknya nilai nol fungsi f(x) tergantung kepada diskriminan dari persamaan kuadrat. Jika D < 0, maka f(x) tidak mempunyai nilai nol. Jika D = 0, maka f(x) hanya mempunyai satu nilai nol. Jika D > 0, naka fungsi f(x) mempunyai dua nilai nol.

Ingat kembali bahwa yang dimaksud diskriminan dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $D = b^2 - 4ac$.

Contoh 1.4

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 8}{3x - 5}$. Pada fungsi itu, nilai diskriminan dari persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 8 = 0$ adalah

$$D = 4^2 - (4)(1)(8) = 16 - 32 = -16 < 0$$

Karena D < 0, maka $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 8}{3x - 5}$ tidak mempunyai nilai nol. Ini berarti juga grafik f(x) tidak memotong sumbu X.

D. NILAI KUTUB FUNGSI PECAH

Selain dikenal adanya nilai nol, dikenal pula adanya nilai kutub (*pole*) suatu fungsi pecah.

Jika diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai (nilai-nilai) x yang menyebabkan Q(x) = 0 disebut nilai kutub dari fungsi f(x). Nilai kutub fungsi f(x), misalnya x = a, menyebabkan f(x) tidak mempunyai nilai (tidak terdefinisi) pada x = a tersebut. Andaikan mempunyai nilai, maka nilai tersebut merupakan nilai tak tentu yang berasal dari pembagian nol dengan nol. Nilai tak tentu ini diperoleh jika nilai kutub fungsi juga sekaligus merupakan nilai nol fungsi.

Karena alasan di atas tersebut, nilai kutub tidak menjadi anggota daerah asal suatu fungsi. Hal ini supaya definisi fungsi yang mengharuskan setiap anggota di daerah asal dikawankan dengan anggota di daerah kawan dapat dipenuhi. Ini berarti, pada pembicaraan mengenai fungsi pecah ini diperjanjikan bahwa daerah asal fungsi adalah himpunan bilangan nyata (real) dikurangi dengan titik-titik kutub fungsinya.

Contoh 1.5

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5}$. Nilai kutub dari fungsi tersebut dapat dicari sebagai berikut.

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Jadi, nilai kutub dari $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5}$ adalah x = 5. Ini berarti bahwa f(x) tidak mempunyai nilai untuk x = 5, sebab $f(5) = \dfrac{43}{0}$ = tak terdefinisi.

Perhatikan bahwa daerah asal fungsi pada Contoh 1.5 adalah $\{x \mid x \text{ real}; x \neq 5\}$. Oleh karena itu, penulisan yang tepat rumus fungsi tersebut adalah $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5}$; $x \neq 5$.

Namun biasanya, keterangan bahwa $x \neq 5$ tidak ditulis. Pembaca diharapkan dapat memahami hal ini, sebab kadang-kadang suatu soal meminta untuk mencari nilai kutubnya. Kalau nilai kutubnya sudah ditulis, soal tersebut menjadi tidak berarti lagi.

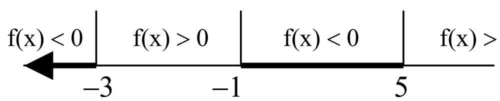
Nilai nol dan nilai kutub suatu fungsi pecah dapat dipakai untuk menentukan pada interval mana f(x) berharga positif atau berharga negatif. Cara mencarinya menggunakan prinsip penyelesaian pertidaksamaan.

Contoh 1.6

Carilah interval di mana nilai fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5}$ berharga negatif.

Jawab:

Berdasarkan Contoh 1.3 dan Contoh 1.5 diperoleh nilai nol fungsi adalah $x = -1$ dan $x = -3$ dan nilai kutubnya adalah $x = 5$.



$$f(x) < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 5} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+3)}{x - 5} < 0 \quad \Leftrightarrow x < -3 \text{ atau } -1 < x < 5$$

Jadi, pada interval $\{x \mid x < -3 \text{ atau } -1 < x < 5\}$, f(x) berharga negatif.

Contoh 1.6 sekaligus menunjukkan kepada kita bahwa:

a. pada interval $\{x \mid x < -3 \text{ atau } -1 < x < 5\}$ grafik f(x) berada di bawah sumbu X
b. pada interval $\{x \mid -3 < x < -1 \text{ atau } x > 5\}$ grafik f(x) berada di atas sumbu X.

Menentukan di mana grafik f(x) berada (di atas atau di bawah sumbu X) setring disebut menentukan daerah grafik fungsi.

E. NILAI BALIK DAN TITIK BALIK

Pengertian nilai balik dan titik balik sudah diperkenalkan kepada para siswa sejak mereka di SLTP, yaitu ketika kita membicarakan grafik fungsi kuadrat. Seperti diketahui, grafik fungsi kuadrat berbentuk parabol.

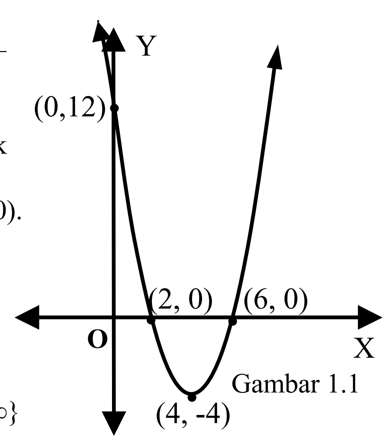
Kecuali bentuknya yang berupa parabol, sudah diketahui pula bahwa grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik di (x_b, y_b) di mana:

$$x_b = -\frac{b}{2a} \text{ dan } y_b = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Contoh 1.7

Misalnya diketahui fungsi kuadrat yang dirumuskan oleh $f(x) = x^2 - 8x + 12$. Untuk menggambar grafiknya, biasanya dicari dulu titik potongnya dengan sumbu X, titik potongnya dengan sumbu Y, dan titik baliknya. Setelah itu dibuat kurva yang mulus melalui titik-titik tersebut.

- Titik potongnya dengan sumbu X ialah titik (2,0) dan (6,0).
- Titik potongnya dengan sumbu Y ialah titik (0,12).
- Titik baliknya ialah titik (4, –4).
- Grafiknya adalah sebagai berikut.
- Kalau dikaitkan dengan pengertian daerah asal (DA) dan daerah hasil (DH) fungsi, maka untuk fungsi tersebut diperoleh: $DA = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ dan $DH = \{y \mid -4 \leq y < \infty\}$



Gambar 1.1

Perhatikanlah bahwa titik (4,–4) pada Gambar 1.1 merupakan titik balik minimum, sebab titik tersebut adalah titik yang terrendah dibandingkan titik-titik yang lainnya. Di sisi lain, nilai –4 disebut nilai balik minimum, sebab –4 adalah nilai fungsi yang paling kecil dibandingkan dengan nilai fungsi untuk anggota yang lain di daerah asalnya. Artinya, untuk setiap x anggota daerah asal yang $x \neq 4$, maka akan berlaku $f(x) > -4$. Tentu saja untuk $x = 4$, $f(x) = -4$.

Fungsi kuadrat pada Contoh 1.7 tidak mempunyai titik balik maksimum, sebab tidak ada titik yang tertinggi. Akibatnya, fungsi kuadrat tersebut tidak mempunyai nilai balik maksimum.

Nilai balik sering juga disebut nilai ekstrim. Pengertian matematis mengenai nilai ekstrim adalah sebagai berikut.

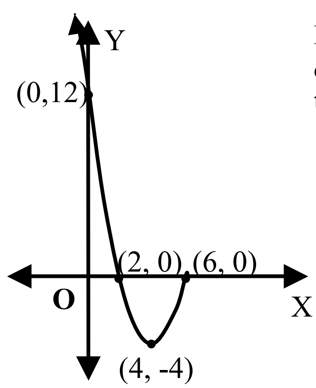
Misalnya DA adalah daerah asal untuk fungsi f, dan misalnya $c \in$ DA.
Dikatakan bahwa:
1. **f (c) adalah nilai ekstrim maksimum untuk fungsi f jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di DA.**
2. **f (c) adalah nilai ekstrim minimum untuk fungsi f jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di DA.**

Nilai ekstrim yang disebutkan di atas adalah *nilai balik global* atau *nilai balik mutlak*, karena dibandingkan dengan nilai fungsi untuk setiap anggota di daerah asal.

Ada yang disebut *nilai ekstrim lokal*, yaitu nilai ekstrim yang pembandingannya dilakukan terhadap nilai-nilai x di sekitarnya. Tentu saja nilai ekstrim lokal dapat menjadi nilai ekstrim global. Nilai ekstrim global dengan sendirinya merupakan nilai ekstrim lokal. Pembedaan tersebut mengakibatkan adanya titik ekstrim global dan titik ekstrim lokal.

Contoh 1.8

Misalnya fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 8x + 12$ pada Contoh 1.7 didefinisikan pada daerah asal $\{x \mid 0 \leq x \leq 6\}$. Maka grafiknya tampak pada gambar berikut.



Gambar 1.2

Dari Gambar 1.2 dapat dilihat bahwa daerah hasil fungsi tersebut sekarang adalah DH = $\{y \mid -4 \leq y \leq 12\}$. Tampak pula bahwa titik (0,12) adalah titik ekstrim maksimum global (yang juga merupakan titik ekstrim maksimum lokal), sedangkan titik (6,0) adalah titik ekstrim maksimum lokal. Di sisi lain, titik (4,–4) adalah titik ekstrim minimum global (yang juga merupakan titik ekstrim minimum lokal).

Pengertian matematis mengenai nilai balik lokal adalah sebagai berikut.

Misalnya DA adalah daerah asal untuk fungsi f dan $c \in$ DA. Dikatakan bahwa:
1. **f(c) adalah nilai ekstrim maksimum lokal untuk fungsi f jika terdapat interval $\{x \mid a < x < b\}$ yang memuat c sedemikian hingga f(c) adalah nilai maksimum pada interval $\{x \mid a < x < b\}$.**
2. **f(c) adalah nilai ekstrim minimum lokal untuk fungsi f jika terdapat interval $\{x \mid a < x < b\}$ yang memuat c sedemikian hingga f(c) adalah nilai minimum pada interval $\{x \mid a < x < b\}$.**

Kadang-kadang nilai ekstrim lokal disebut nilai ekstrim relatif dan titik ekstrim lokal disebut titik ekstrim relatif.

F. MENCARI TITIK BALIK FUNGSI PECAH SECARA ALJABAR

Sekarang akan dibicarakan cara mencari titik balik fungsi secara aljabar.

Yang dimaksud titik balik pada bagian ini adalah titik balik lokal, sedangkan untuk melihat apakah titik balik tersebut sekaligus merupakan titik balik global dapat dilihat pada grafiknya. Perlu diketahui pula bahwa mencari titik balik, kecuali dapat dilakukan secara aljabar seperti yang akan kita bicarakan, dapat pula dilakukan dengan menggunakan konsep turunan. Cara mencari titik balik dengan menggunakan turunan tidak dibahas dalam paket ini.

Perhatikan fungsi pecah $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Misalnya titik balik fungsi tersebut adalah (a,m). Jika demikian, maka grafik fungsi yang persamaannya $y = f(x)$ menyinggung garis yang persamaannya $y = m$. Perlu diketahui bahwa garis $y = m$ adalah garis yang sejajar dengan sumbu X dan melalui titik (0,m). Jadi, untuk mencari titik balik fungsi f(x) perlu dicari adakah garis $y = m$ yang menyinggung grafik fungsi f(x).

Berikut ini akan dibicarakan cara mencari titik balik untuk beberapa jenis fungsi pecah yang P(x) dan Q(x) masing-masing berderajat maksimum dua.

Kasus Untuk $f(x) = \dfrac{ax+b}{px+q}$; $a \neq 0$ dan $p \neq 0$.

Untuk melihat apakah ada nilai balik pada fungsi $f(x) = \dfrac{ax+b}{px+q}$ atau tidak, dicari apakah terdapat garis $y = m$ yang menyinggung grafik fungsi $y = f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{ax+b}{px+q} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ax+b}{px+q} = m$$

$$\Leftrightarrow ax + b = mpx + mq \Leftrightarrow (a - mp)x = mq - b \Leftrightarrow x = \frac{mq-b}{a-mp}$$

Tampak bahwa untuk setiap m, grafik $y = f(x)$ selalu berpotongan dengan garis $y = m$, karena selalu dapat ditemukan absis titik potongnya, yaitu $x = \dfrac{mq-b}{a-mp}$.

Jadi fungsi pecah $f(x) = \dfrac{ax+b}{px+q}$ tidak mempunyai nilai balik, yang berarti juga tidak mempunyai titik balik.

Kasus Untuk $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$; $a \neq 0$ dan $p \neq 0$.

Untuk melihat apakah ada nilai balik pada fungsi $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ atau tidak, dicari apakah terdapat garis $y = m$ yang menyinggung grafik fungsi $y = f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r} = m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\Leftrightarrow mpx^2 + mqx + mr = ax^2 + bx + c$$

$$\Leftrightarrow (mp - a)x^2 + (mq - b)x + (mr - c) = 0 \quad \ldots\ldots\ (2)$$

Tampak bahwa persamaan (2) merupakan persamaan kuadrat. Garis $y = m$ akan bersinggungan dengan grafik $y = f(x)$ apabila diskriminan persamaan kuadrat (2) bernilai nol. Misalnya D adalah diskriminan dari persamaan (2), maka:

$$D = (mq - b)^2 - (4)(mp - a)(mr - c)$$
$$= (q^2 - 4pr)m^2 - (2bq - 4ar - 4cp)m + (b^2 - 4ac) = Am^2 + Bm + C$$

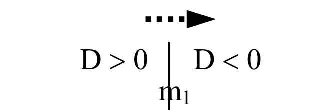
dengan $A = (q^2 - 4pr)$; $B = -(2bq - 4ar - 4cp)$; dan $C = (b^2 - 4ac)$

Nilai balik ada jika $D = 0$ atau $Am^2 + Bm + C = 0$ …………………….………… (3)

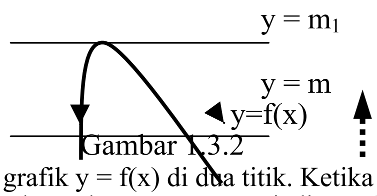
Nilai m yang diperoleh dari persamaan (3) merupakan nilai balik fungsi (yang sekaligus juga merupakan ordinat titik balik yang dicari). Tentu saja nilai m ini harus sekaligus memenuhi persamaan (1) dan (2).

Jika nilai m (yang merupakan ordinat titik balik) telah ditemukan, absisnya dapat dicari dari persamaan (1) atau persamaan (2), yaitu $x = \dfrac{b - mq}{2(mp - a)}$.

Untuk menentukan jenisnya (maksimum atau minimum), misalnya m_1 adalah penyelesaian dari persamaan (3). Kemudian perhatikan diagram berikut ini.

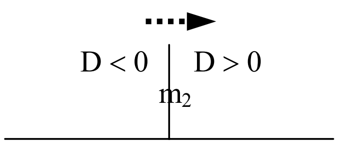


Gambar 1.3.1

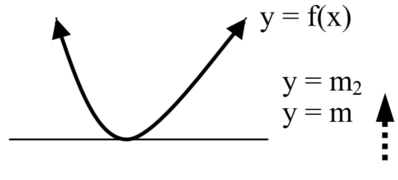


Gambar 1.3.2

Pada saat $D > 0$, maka garis $y = m$ memotong grafik $y = f(x)$ di dua titik. Ketika garis $y = m$ digeser perlahan-lahan ke atas (pada Gambar 1.3.2), maka pada saat $y = m_1$ terjadi $D = 0$. Kalau digeser ke atas setelah itu, maka $y = m$ tidak berpotongan dengan grafik $y = f(x)$ dan serta merta harga D adalah negatif ($D < 0$). Tampak bahwa pada saat $y = m_1$ terjadi adanya titik balik maksimum. Jadi, kalau nilai-nilai D di sekitar m_1 keadaannya seperti pada Gambar 1.3.1, maka akan terjadi titik balik maksimum.



Gambar 1.4.1



Gambar 1.4.2

Kemudian perhatikan Gambar 1.4.1. Pada saat $D < 0$, garis $y = m$ tidak memotong grafik $y = f(x)$. Kalau garis $y = m$ digeser ke atas perlahan-lahan, maka pada saat $y = m_2$, akan terjadi $D = 0$. Kalau kemudian digeser lagi ke atas, maka garis $y = m$ akan memotong grafik di dua tempat; dan pada saat itu pula nilai D menjadi positif ($D > 0$). Tampak bahwa pada saat $y = m_2$ terjadi titik balik minimum. Jadi, kalau nilai D di sekitar $y = m_2$ keadaannya seperti pada Gambar 1.4.1, maka akan terjadi titik balik minimum.

Kasus Untuk $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$; $a \neq 0$ dan $p \neq 0$.

Cara untuk mencari nilai balik dan titik balik dari fungsi jenis ini sama dengan cara mencari nilai balik dan titik balik pada fungsi $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

Contoh 1.9

Carilah titik balik, jika ada, dari fungsi $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$ dan tentukan jenisnya.

Jawab:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{1 - x^2} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{1 - x^2} = m$$

$$\Leftrightarrow x^2 = m - mx^2$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)x^2 - m = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} D = 0^2 + 4(m + 1)m \\ D = 0 \text{ (syarat adanya titik balik)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 4(m + 1)m = 0 \\ \Leftrightarrow m = -1 \text{ atau } m = 0 \end{array}$$

- Untuk m = –1, dari persamaan (1) tidak diperoleh nilai x. Ini berarti tidak ada titik balik yang bersesuaian dengan m = –1.
- Untuk m = 0, dari persamaan (1) diperoleh x = 0, dan titik balik yang bersesuaian adalah titik (0,0).

Untuk menentukan jenis titik balik yang diperoleh, nilai m yang diperoleh ditempatkan pada garis bilangan, kemudian ditentukan tanda D (negatif atau positifnya) pada interval-interval yang ada. (Ingat penyelesaian pertidaksamaan kuadrat).

D < 0	D > 0

m = 0

Dengan membandingkan gambar di atas dengan Gambar 1.4.1, disimpulkan bahwa nilai m = 0 menyebabkan adanya titik balik minimum. Jadi, titik baliknya ialah (0,0) dan merupakan titik balik minimum.

Contoh 1.10

Carilah titik balik, jika ada, dari fungsi f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-1}$

Jawab:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2-4}{x-1} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4}{x-1} = m \Leftrightarrow x^2 - 4 = mx - m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + (m - 4) = 0$$

$D = (-m)^2 - (4)(m-4) = m^2 - 4m + 16 = (m-2)^2 + 12$

Tampak bahwa D tidak mungkin berharga nol. Berarti grafik fungsi f(x) tidak mempunyai titik balik.

Contoh 1.11

Carilah titik balik, jika ada, dari fungsi f(x) = $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+4}$

Jawab:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x+4} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+4} = m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = mx^2 - 5mx + 4m$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - (5m-4)x + 4m - 4 = 0$$

$D = (5m-4)^2 - (4)(m-1)(4m-4)$

$\quad = (25m^2 - 40m + 16) - (16m^2 - 32m + 16) = 9m^2 - 8m$

$D = 0 \Rightarrow 9m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ atau $m = \frac{8}{9}$

Untuk m = 0 diperoleh x = $\dfrac{5m-4}{2(m-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

Untuk m = $\frac{8}{9}$ diperoleh x = $\dfrac{5m-4}{2(m-1)} = \dfrac{\frac{40}{9}-4}{2(\frac{8}{9}-1)} = \dfrac{\frac{4}{9}}{-\frac{2}{9}} = -2$

D > 0	D < 0	D > 0

0 $\qquad$ $\frac{8}{9}$

Jadi, titik baliknya adalah (2,0) (yang merupakan titik balik maksimum) dan (-2, $\frac{8}{9}$) (yang merupakan titik balik minimum).

Perlu diketahui kembali bahwa pencarian titik balik dengan cara ini hanya berlaku untuk fungsi pecah $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan P(x) dan Q(x) paling tinggi berderajat dua. Untuk P(x) dan Q(x) yang berderajat lebih dari dua, pencarian titik balik akan dapat dilakukan dengan menggunakan pengertian turunan, yang tidak dibicarakan pada paket ini.

G. ASIMTOT

Asimtot grafik fungsi f adalah sebuah garis lurus *l* demikian hingga lambat laun jarak antara titik-titik pada grafik f dengan garis *l* lebih kecil daripada penggal garis yang manapun juga, tetapi tidak menjadi nol. Dengan kata lain, antara grafik fungsi f dan garis *l* semakin lama akan semakin berdekatan, tetapi tidak akan memotongnya.

Tentu saja tidak semua grafik fungsi f mempunyai asimtot. Grafik fungsi linear dan fungsi kuadrat, misalnya, tidak mempunyai asimtot.

H. ASIMTOT TEGAK FUNGSI PECAH

Perhatikan kembali fungsi pecah $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Jika nilai kutub fungsi tersebut ada, misalnya nilai kutubnya adalah x = a, yang nilai kutub tersebut bukan nilai nol fungsi. Maka f(a) tidak terdefinisi atau tidak ada.

Sekalipun nilai f(a) tidak ada, namun untuk x di sekitar a, nilai f(x) pasti ada. Semakin dekat x dengan a, maka nilai f(x) semakin besar mendekati tak hingga (+∞) atau semakin kecil mendekati minus tak hingga (–∞), tergantung kepada keadaannya. Dengan menggunakan konsep limit, hal tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = +\infty$ atau $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = -\infty$ atau

$\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = +\infty$ atau $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = -\infty$

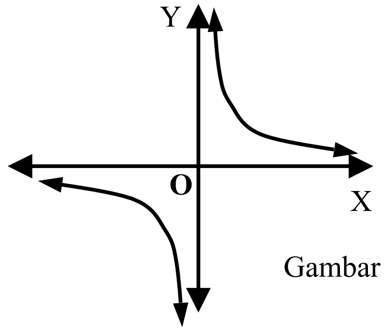
Notasi $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ diartikan bahwa nilai x mendekati a dari sebelah kanan a (limit kanan) dan $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ diartikan bahwa nilai x mendekati a dari sebelah kiri (limit kiri).

Dalam keadaan seperti ini, garis x = a merupakan sebuah asimtot dan disebut *asimtot tegak* untuk fungsi f(x), yaitu garis yang tegak lurus pada sumbu X yang garis itu didekati terus menerus oleh grafik fungsi f(x) jika x bergerak menuju a.

Ini berarti, jika x = a adalah nilai kutub fungsi pecahnya, maka garis dengan persamaan x = a adalah asimtot tegak dari fungsi pecahnya. Jika nilai kutub suatu fungsi pecah tidak ada, maka asimtot tegaknya juga tidak ada.

Contoh 1.12

Sejak di SLTP siswa sudah diperkenalkan kurva atau tempat kedudukan yang berbentuk hiperbol. Salah satu hiperbol yang paling sederhana adalah hiperbol yang persamaan grafiknya $y = \frac{1}{x}$. Jika dikaitkan dengan rumus fungsinya, maka rumus fungsi untuk hiperbol itu ialah $f(x) = \frac{1}{x}$.Dengan menggambar titik demi titik dapat diperoleh grafiknya, yaitu yang tampak pada gambar berikut.



Gambar 1.5

Dari Gambar 1.5, dapat dilihat bahwa grafiknya tidak akan memotong garis x = 0 (atau sumbu Y) walaupun grafiknya digambar terus menerus ke atas dan ke bawah. Namun demikian, grafiknya akan terus menerus mendekati garis x = 0 jika grafiknya digambar terus menerus ke arah atas maupun ke arah bawah. Garis x = 0 ini lah yang disebut asimtot tegak untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$. Perhatikan pula bahwa x = 0 adalah nilai kutub dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$.

Contoh 1.13

Tentukan asimtot tegak untuk fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 5}$, jika ada.

Jawab:

Nilai kutub dari fungsi itu ialah x = 5. Berarti asimtot tegaknya adalah garis yang persamaanya x = 5.

Contoh 1.14

Tentukan asimtot tegak dari $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$, jika ada.

Jawab:

Perhatikan suku banyak $Q(x) = x^2 - x + 2$. Bentuk Q(x) dapat diubah sebagai berikut.

$$Q(x) = x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$$

Tampak bahwa Q(x) definit positif (selalu positif), sehingga Q(x) tidak mungkin bernilai nol. Hal ni berarti tidak ada asimtot tegak untuk fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$.

Dari beberapa contoh di atas dapat disimpulkan adanya asimtot-asimtot tegak pada fungsi pecah sebagai berikut.

a. Fungsi pecah $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ mempunyai asimtot tegak yaitu garis $x = -\dfrac{d}{c}$.
b. Fungsi pecah $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ mempunyai asimtot tegak garis x = s dan x = t jika $px^2 + qx + r = 0$ mempunyai penyelesaian x = s dan x = t. **c. Fungsi pecah $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ mempunyai asimtot tegak garis $x = -\dfrac{q}{p}$.**

I. ASIMTOT MENDATAR FUNGSI PECAH

Kecuali mempunyai asimtot tegak, suatu fungsi pecah dapat pula mempunyai asimtot mendatar, yaitu garis yang sejajar dengan sumbu X yang selalu didekati oleh grafik fungsi f(x) jika x mendekati tak berhingga atau jika x mendekati minus tak berhingga.

Hal ini berarti, jika terdapat nilai b demikian hingga $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ maka garis y = b merupakan asimtot mendatar untuk fungsi f(x).

Contoh 1.15

Perhatikan kembali grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ pada Gambar 1.5. Grafik tersebut tidak pernah memotong sumbu X, tetapi akan terus menerus mendekatinya ke arah kanan maupun ke arah kiri. Hal ini berarti bahwa sumbu X (atau garis dengan persamaan y = 0) adalah asimtot mendatar untuk fungsi f(x) $= \frac{1}{x}$. Di sisi lain, kita mengetahui bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Contoh 1.16

Carilah asimtot mendatar untuk fungsi f(x) = $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-5x-4}$, jika ada.

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}} = 1$$

Ini berarti, asimtot mendatar untuk f(x) adalah garis y = 1.

Contoh 1.17

Carilah asimtot mendatar dari fungsi f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-1}$, jika ada.

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \infty$$

Karena tidak terdapat nilai b (yang tertentu) demikian hingga $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, maka fungsi f(x) tidak mempunyai asimtot mendatar.

Dari beberapa contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

> a. **Fungsi pecah f(x) = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ mempunyai asimtot mendatar garis y = $\dfrac{a}{c}$.**
>
> b. **Fungsi pecah f(x) = $\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ mempunyai asimtot mendatar garis y=$\dfrac{a}{p}$.**
>
> c. **Fungsi pecah f(x) = $\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ tidak mempunyai asimtot mendatar.**

J. ASIMTOT MIRING FUNGSI PECAH

Apabila garis yang didekati terus menerus oleh grafik fungsi f(x) bukan garis yang sejajar dengan sumbu X dan bukan pula tegak lurus pada sumbu X maka garis tersebut disebut asimtot miring. Fungsi pecah yang tidak mempunyai asimtot mendatar, biasanya mempunyai asimtot miring.

Perhatikan fungsi yang dirumuskan oleh f(x) = $\dfrac{x^2-4}{x-1}$. Persamaan grafik fungsi tersebut ialah y = $\dfrac{x^2-4}{x-1}$. Dengan melakukan pembagian pembilang dengan penyebut, diperoleh:

$$y = \frac{x^2-4}{x-1} = x + 1 - \frac{3}{x-1} = x + 1 + g(x) \text{ di mana } g(x) = \frac{-3}{x-1}.$$

Untuk $x \to \infty$ maka $g(x) \to 0$. Hal ini berarti bahwa untuk $x \to \infty$, nilai y dari y = $\dfrac{x^2-4}{x-1}$ akan mendekati nilai y dari y = x + 1. Dengan kata lain, jika x mendekati tak hingga maka grafik y = $\dfrac{x^2-4}{x-1}$ juga akan mendekati grafik y = x + 1, tetapi mereka tidak akan berpotongan. Dalam kasus ini, garis y = x + 1 juga merupakan asimtot, dan disebut *asimtot miring*.

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa:

Fungsi pecah f(x) = $\frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ mempunyai asimtot miring y = mx + n, jika terdapat m, n, dan t demikian hingga

$$\mathbf{f(x)} = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q} = \mathbf{mx + n +} \frac{t}{px + q}\ \mathbf{;\ t \neq 0.}$$

K. PERSOALAN YANG BERKAITAN DENGAN FUNGSI PECAH

Berikut ini diberikan beberapa contoh soal yang berkaitan dengan fungsi pecah.

Contoh 1.18

Grafik fungsi f(x) = $\frac{px + q}{x + r}$ melalui titik-titik A(–4,9) dan B(4,1), sedangkan asimtot tegaknya adalah garis x = –3. Carilah p, q, dan r.

Jawab:

Garis x = –3 adalah asimtot, berarti –3 adalah nilai kutub dari fungsi f(x).

$$\left.\begin{aligned} x + r &= 0 \\ x &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r = 3$$

Titik A(–4,9) terletak pada grafik fungsi f, berarti dipenuhi:

$$9 = \frac{-4p + q}{-4 + 3} \Leftrightarrow 4p - q = 9 \text{ ……………………. (1)}$$

Titik B(4,1) terletak pada grafik fungsi f, berarti dipenuhi:

$$1 = \frac{4p + q}{4 + 3} \Leftrightarrow 4p + q = 7 \text{ ……………………. (2)}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh p = 2 dan q = –1.

Jadi, p = 2, q = –1, dan r = 3.

Contoh 1.19

Grafik y = $\frac{ax + b}{cx + d}$ melalui titik O(0,0) dan mempunyai asimtot x = 2 dan y = 3. Tentukan rumus fungsinya.

Jawab:

Grafiknya melalui titik O(0,0) berarti: $0 = \frac{b}{d} \Leftrightarrow b = 0$ …………………….. (1)

Asimtot tegaknya x = 2, berarti: $-\frac{d}{c} = 2 \Leftrightarrow d = -2c$ ……………………… (2)

Asimtot mendatarnya y = 3, berarti: $\frac{a}{c} = 3 \Leftrightarrow a = 3c$ ..…………………… (3)

Dari persamaan (1), (2), dan (3), diperoleh: $f(x) = \frac{3cx}{cx - 2c} = \frac{3x}{x - 2}$

Jadi, rumus fungsinya ialah $f(x) = \frac{3x}{x - 2}$

Contoh 1.20

Tentukan fungsi pecah f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, di mana P(x) dan Q(x) berderajat dua, yang grafiknya memotong sumbu X di titik (–2,0) dan (2,0) serta mempunyai asimtot garis-garis x = –1, x = 4, dan y = 1.

Jawab:

Misalnya P(x) = $ax^2 + bx + c$ dan Q(x) = $px^2 + qx + r$.

Grafik memotong sumbu X di titik (–2,0) dan (2,0), berarti:

$$P(x) = a(x + 2)(x - 2) \text{ …………………………………… (1)}$$

Grafik mempunyai asimtot tegak x = –1 dan x = 4, berarti:

$$Q(x) = p(x+1)(x-4) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{(2)}$$

Grafik mempunyai asimtot mendatar y = 1, berarti:

$$\frac{a}{p} = 1 \Leftrightarrow a = p \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{(3)}$$

Dari persamaan (1), (2), dan (3) diperoleh: $f(x) = \dfrac{p(x+2)(x-2)}{p(x+1)(x-4)} = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}$

Jadi, rumus fungsinya adalah $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}$.

LATIHAN 2

1. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$
   a. Carilah titik potong grafik dengan sumbu X, titik potong grafik dengan sumbu Y, asimtot mendatar, dan asimtot tegaknya.
   b. Tunjukkan bahwa fungsi tersebut tidak mempunyai titik balik.
2. Diketahui $f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$.Carilah titik potong grafik dengan sumbu X, titik potong grafik dengan sumbu Y, asimtot mendatar, dan asimtot tegaknya.
3. Tentukan asimtot-asimtot grafik fungsi $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, jika grafiknya melalui titik-titik (0,1), (3,2), dan (4,3).
4. Grafik $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ melalui titik (–1,4) dan mempunyai asimtot-asimtot $x = -\dfrac{1}{2}$ dan $y = \dfrac{1}{2}$. Tentukan rumus fungsinya.
5. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+4}$. Tentukan:
   a. titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat.
   b. asimtot-asimtotnya.
   c. titik balik dan jenisnya.
6. Seperti nomor 5 untuk fungsi (a) $f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2+x-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x+2}$. (c) $f(x) = \dfrac{2x^2-x-3}{x^2-5x+4}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2-x-20}{x-4}$, (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$.
   (f) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+10}{x-3}$.
7. Grafik $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ memotong sumbu X di (–3,0) dan (2,0) dan mempunyai asimtot garis-garis x = 1, x = –4, dan $y = \dfrac{1}{2}$. Tentukan rumus fungsinya.
8. Grafik $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ melalui titik-titik (3,0), (–5,0), dan (0,5). Grafik fungsinya mempunyai asimtot garis x = –3. Tentukan rumus fungsinya.
9. Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2+px+q}{x-1}$ mempunyai nilai balik 3 dan 7. Hitung p dan q.
10. Grafik $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ***hanya*** mempunyai asimtot tegak x = –1, melalui titik (-3,-2), dan mempunyai titik balik (1,2). Tentukan rumus fungsi itu.

BAGIAN II
PEMBELAJARAN GRAFIK FUNGSI PECAH

A. LANGKAH-LANGKAH MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI PECAH

Pada bagian ini akan dibicarakan cara menggambar grafik fungsi pecah. Namun, seperti telah dinyatakan pada Bagian I, tidak semua jenis fungsi pecah dibicarakan. Pada paket ini hanya akan dibicarakan cara menggambar fungsi pecah $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ dengan derajat P(x) dan Q(x) masing-masing paling tinggi dua, yang secara umum dibedakan menjadi tiga kelompok, yaitu fungsi pecah dalam bentuk:

$$(1)\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ (2)\ f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r},\ \text{dan } (3)\ f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}.$$

Biasanya, langkah-langkah untuk menggambar grafik fungsi pecah tersebut adalah sebagai berikut.

1. Dicari titik potongnya dengan sumbu X.
2. Dicari titik potongnya dengan sumbu Y.
3. Dicari asimtot-asimtotnya (asimtot mendatar, asimtot tegak, dan asimtot miring).
4. Dicari titik potongnya dengan asimtot mendatarnya. Jika titik potong antara grafik dengan asimtot mendatar ada, maka titik potong itu hanya sebuah. Yang biasanya mempunyai titik potong dengan asimtot mendatar adalah grafik fungsi pecah jenis kedua.
5. Dicari titik ekstrim dan jenisnya (maksimum atau minimum).
6. Untuk mempermudah menggambar grafik, kalau diperlukan ditentukan beberapa titik bantu dan daerah grafiknya.

Setelah grafiknya dapat digambar, kita dapat pula menentukan daerah hasil dari fungsi yang diketahui.

B. GRAFIK FUNGSI $f(x) = \dfrac{ax+b}{px+q}$

Dalam kelompok ini termasuk apabila a = 0 (namun b ≠ 0 dan p ≠ 0).

Contoh 2.1

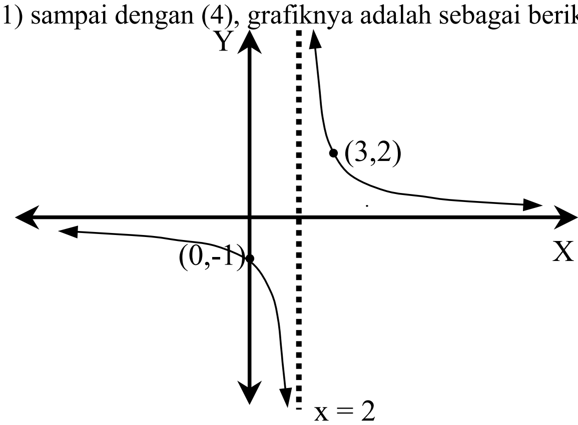
Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \dfrac{2}{x-2}$. Kemudian tulislah daerah asal dan daerah hasilnya.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*: Titik potong grafik dengan sumbu X tidak ada, sebab tidak ada nilai nol.
2. *Titik potong dengan sumbu Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -1$
   Berarti, grafiknya memotong sumbu Y di (0, –1).
3. *Asimtot mendatar*: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x-2} = 0$
   Berarti, asimtot mendatarnya adalah garis y = 0 (atau sumbu X)
4. *Asimtot tegak*: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Berarti, asimtot tegaknya adalah x = 2.
5. *Titik-titik bantu*:

x	–1	1	3	4
f(x)	$-\frac{2}{3}$	–2	2	1
Titik	$(-1,-\frac{2}{3})$	(1, –2)	(3,2)	(4,1)

Berarti grafiknya melalui titik-titik $(-1,-\frac{2}{3})$, (1, –2), (3,2), dan (4,1), Berdasarkan (1) sampai dengan (4), grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.1

Dari Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa daerah asal dan daerah hasilnya adalah

DA = {x | x nyata; x $\neq$ 2} dan DH = {y | y nyata; y $\neq$ 0}.

Contoh 2.2

Gambarlah grafik $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*:

   $f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$

   $\Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

   Grafik f(x) memotong sumbu X di titik $(-\dfrac{5}{2},0)$.

2. *Titik potong dengan sumbu Y*:

   $x = 0 \Rightarrow f(0) = -5$

   Grafik f(x) memotong sumbu Y di titik (0, –5).

3. *Asimtot mendatar*:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x-1} = 2$$

   Berarti, asimtot mendatarnya adalah y = 2.

4. *Asimtot tegak:*

   $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

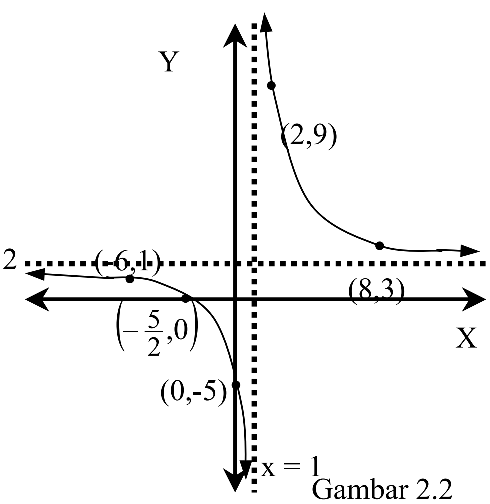
   Berarti, asimtot tegaknya ialah x = 1.

5. *Titik-titik bantu*:

x	–6	2	8
f(x)	1	9	3
Titik	(–6,1)	(2,9)	(8,3)

Berarti, grafiknya melalui titik (–6,1), (2,9), dan (8,3).

Berdasarkan (1) sampai dengan (5) grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.2

C. GRAFIK FUNGSI $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

Termasuk pada kelompok ini adalah jika a = 0 atau b = 0 atau keduanya; namun $p \neq 0$.

Contoh 2.3

Gambarlah grafik $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ dan kemudian tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

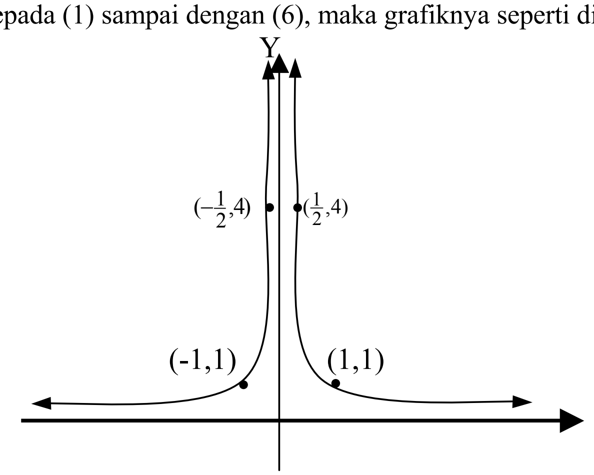
Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*:
   Grafik fungsi f(x) tidak memotong sumbu X, sebab tidak mungkin f(x) berharga nol untuk x yang mana saja.
2. *Titik potong dengan sumbu Y*:
   Grafik fungsi f(x) juga tidak memotong sumbu Y, sebab x juga tidak mungkin berharga nol.
3. *Asimtot mendatar*: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$
   Berarti, asimtot mendatarnya ialah y = 0.
4. *Asimtot tegak*: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   Berarti, asimtot tegaknya ialah x = 0.
5. *Titik balik*:
   $$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
   Dari persamaan (1) dapat dilihat bahwa m selalu positif dan untuk setiap y = m, terdapat dua titik potong yaitu titik-titik $(\sqrt{\dfrac{1}{m}}, m)$ dan $(-\sqrt{\dfrac{1}{m}}, 0)$.
   Ini berarti, tidak ada titik balik pada fungsi ini.
6. *Titik-titik bantu*:

X	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
f(x)	1	4	4	1
Titik	(-1,1)	$(-\frac{1}{2},4)$	$(\frac{1}{2},4)$	(1,1)

   Berarti, grafik fungsi melalui titik-titik (-1,1), $(-\frac{1}{2},4)$, $(\frac{1}{2},4)$, dan (1,1).
7. *Daerah grafik*:
   Karena untuk setiap a selalu berlaku f(a) > 0, maka grafik fungsi selalu berada di atas sumbu X.

Berdasarkan kepada (1) sampai dengan (6), maka grafiknya seperti di bawah ini.



Gambar 2.3

Dengan melihat grafik pada Gambar 2.3 tampak bahwa daerah asal dan daerah hasil fungsinya adalah sebagai berikut.

$$DA = \{x \mid x \text{ nyata}; x \neq 0\} \text{ dan } DH = \{y \mid y \text{ nyata}; y > 0\}$$

Daerah di bawah sumbu X sering disebut daerah bebas grafik, sebab di daerah itu tidak ada gambar grafiknya.

Contoh 2.4

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12}$ dan kemudian tentukan daerah hasilnya.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*:
   Grafik f(x) tidak memotong sumbu X, sebab untuk x yang mana saja, f(x) tidak mungkin berharga nol..
2. *Titik potong dengan sumbu Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{1}{12}$

   Berarti, titik potong grafik dengan sumbu Y ialah titik $(0, \dfrac{1}{12})$
3. *Asimtot mendatar*: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12} = 0$
   Berarti, asimtot datarnya adalah y = 0.
4. *Asimtot tegak*:
   $$x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 6) = 0$$
   $$\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = 6$$
   Berarti, asimtot tegaknya ialah x = 2 dan x = 6.
5. *Titik balik*:
   $$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2 - 8x + 12} = m$$
   $$\Leftrightarrow mx^2 - 8mx + 12m = 1$$
   $$\Leftrightarrow mx^2 - 8mx + (12m - 1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
   $$\left.\begin{array}{l} D = 64m^2 - 48m^2 + 4m = 16m^2 + 4m \\ D = 0 \text{ (syarat adanya titik balik)} \end{array}\right\} \Rightarrow 16m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow 4m(4m + 1) = 0$$
   $$\Leftrightarrow m = 0 \text{ atau } m = -\frac{1}{4}$$
   Untuk m = 0, dari persamaan (1) tidak diperoleh harga x.

   Untuk $m = -\dfrac{1}{4}$, dari persamaan (1) diperoleh x = 4.

D > 0	D < 0
$m = -\frac{1}{4}$	

   Berarti titik baliknya adalah $(4, -\dfrac{1}{4})$, yaitu titik balik maksimum.

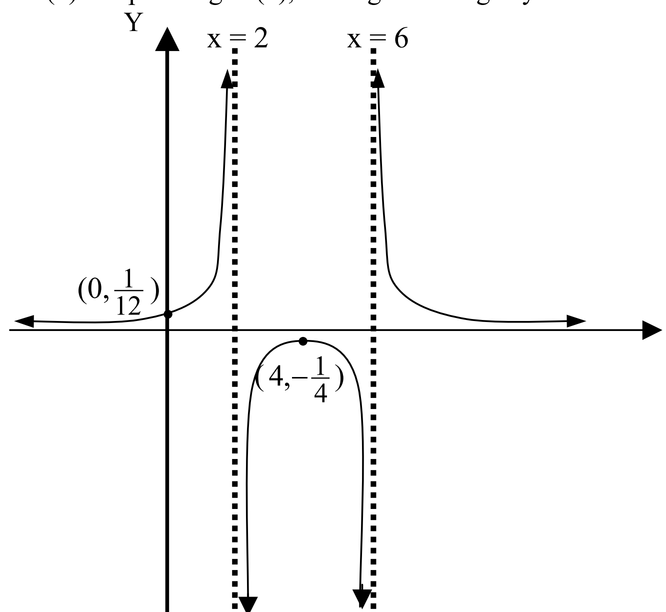
6. *Daerah grafik*:

Karena pembilang dari fungsi pecahnya positif, maka daerah grafiknya tergantung kepada penyebutnya. Oleh karena itu, nilai kutub fungsi menentukan tanda dari f(x).

f(x) > 0	f(x) < 0	f(x) > 0
	2	6

Berarti, pada interval $\{x \mid x < 2 \text{ atau } x > 6\}$ grafiknya berada di atas sumbu X, sedangkan pada interval $\{x \mid 2 < x < 6\}$ grafiknya berada di bawah sumbu X.

Berdasarkan (1) sampai dengan (6), maka grafik fungsinya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.4

Dari grafik pada Gambar 2.4 dapat dilihat bahwa daerah hasil fungsi adalah:

$$DH = \{y \mid -\infty < y \le -\frac{1}{4} \text{ atau } y > 0\}$$

Contoh 2.5

Gambarlah grafik $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-9}$ dan kemudian tentukan daerah hasilnya.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*:

   $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Berarti, grafik fungsi memotong sumbu X di titk (2,0).

2. *Titik potong dengan sumbu Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{4}{9}$

   Berarti, grafik fungsi memotong sumbu Y di titik $(0, \dfrac{4}{9})$.

3. *Asimtot mendatar*: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-4}{x^2-9} = 0$

   Berarti, asimtot datarnya adalah y = 0 (yaitu sumbu X).
4. *Asimtot tegak*: $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ atau $x = 3$

   Berarti asimtot tegaknya adalah garis x = –3 dan x = 3.
5. *Titik potong dengan asimtot mendatar*:

   Karena asimtot mendatarnya adalah sumbu X, maka grafiknya memotong asimtot mendatarnya di titik (2,0).
6. *Titik balik*:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x - 4}{x^2-9} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x - 4}{x^2-9} = m$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 9m = 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 2x - (9m - 4) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} D = 4 + 36m^2 - 16m = 36m^2 - 16m + 4 \\ D = 0 \text{ (syarat adanya titik balik)} \end{array}\right\} \Rightarrow 36m^2 - 16m + 4 = 0$$

$\Rightarrow$ tak ada m yang memenuhi

Berarti tidak ada titik baliknya.

7. *Titik titik bantu*:

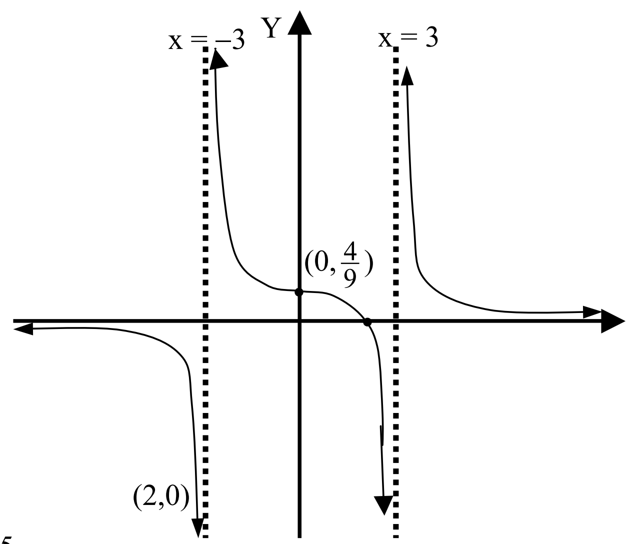
x	–4	–2	4	5
f(x)	$-1\frac{5}{7}$	$1\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$
Titik	$(-4, -1\frac{5}{7})$	$(-2, 1\frac{3}{5})$	$(4, \frac{4}{5})$	$(5, \frac{3}{8})$

8. *Daerah grafik*:

Daerah grafiknya ditentukan oleh nilai nol dan nilai kutubnya.

f(x) < 0	f(x) > 0	f(x) < 0	f(x) > 0
	-3	2	3

Grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.5

Dari Gambar 2.5 diperoleh DH = {y | y real}

Contoh 2.6 Gambarlah grafik dari fungsi f(x) = $\frac{x^2}{1 - x^2}$

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

   Berarti titik potongnya dengan sumbu X ialah (0,0).

2. *Titik potong dengan sumbu Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ Grafik memotong sumbu Y di (0,0)..

3. *Asimtot mendatar*: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = -1 \rightarrow$ asimtot mendatarnya adalah y = – 1.

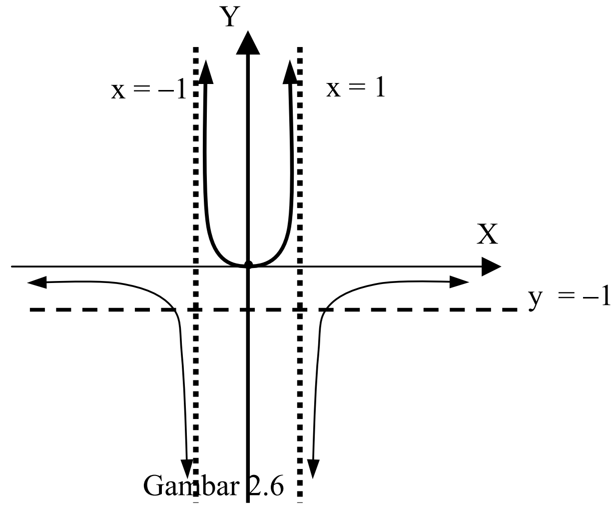
4. *Asimtot tegak*: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 1$

   Berarti, asimtot tegaknya ialah x = – 1 dan x = 1.

5. *Titik balik*:

   Titik baliknya adalah (0,0) dan merupakan titik balik minimum (Contoh 1.9).

Grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.6

Contoh 2.7

Gambarlah grafik $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 4}$.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Berarti, grafik fungsi memotong sumbu X di titik (2,0).
2. *Titik potong dengan sumbu Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ grafik fungsi memotong sumbu Y di titik (0,1).
3. *Asimtot mendatar*: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 4} = 1$
   Berarti, asimtot mendatarnya adalah y = 1.
4. *Asimtot tegak*: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ atau $x = 4$
   Berarti, asimtot tegaknya ialah x = 1 dan x = 4.
5. *Titik potong dengan asimtot mendatar*:
   $$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 4} \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4 \Leftrightarrow x = 0$$
   Berarti, grafik fungsi memotong asimtot mendatar y = 1 di titik (0,1).

6. *Titik balik*:

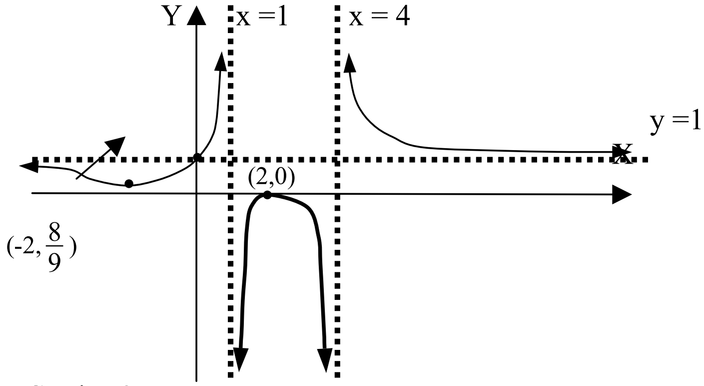
   Titik baliknya adalah titik (2,0) yang merupakan titik balik maksimum dan titik $(-2, \frac{8}{9})$ yang merupakan titik balik minimum (lihat Contoh 1.11).
7. *Titik-titik bantu*:

x	3	5	6
f(x)	$-\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
Titik	$(3, -\frac{1}{2})$	$(5,\ 2\frac{1}{4})$	$(6,\ 1\frac{3}{4})$

8. *Daerah grafik*:

f(x) > 0	f(x) < 0	f(x) < 0	f(x) > 0
1	2	4	

Grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.7

D. GRAFIK FUNGSI $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$;

Pada bagian ini dibicarakan bentuk $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ untuk $a \neq 0$ dan $p \neq 0$. Perhatikan kembali: bentuk ini tidak mempunyai asimtot mendatar, tetapi mempunyai asimtot miring.

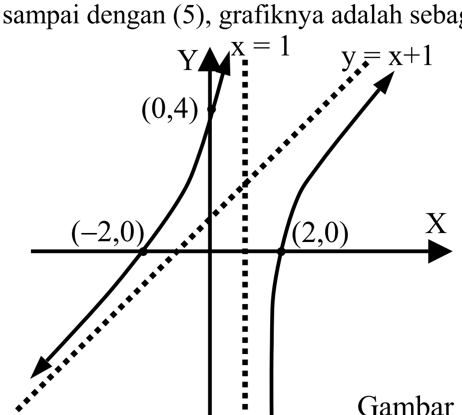
Contoh 2.8

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$, dan kemudian tentukan daerah hasilnya.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*:
   $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -2$
   Berarti, grafik memotong sumbu X di titik (2,0) dan (–2,0).
2. *Titik potong dengan sumbu Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$
   Berarti, grafik memotong sumbu Y di titik (0,4).
3. *Asimtot tegak*: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
   Asimtot tegaknya ialah garis $x = 1$.
4. *Asimtot miring*: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} = x + 1 - \dfrac{3}{x - 1}$
   Berarti, asimtot miringnya adalah $y = x + 1$.
5. *Titik balik*: Grafik fungsi ini tidak mempunyai titik balik (lihat Contoh 1.10).

Berdasarkan (1) sampai dengan (5), grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.8

Dengan melihat grafik pada Gambar 2.8, maka DH = {y | y real}

Contoh 2.9

Gambarlah grafik $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ dan kemudian tentukan daerah hasilnya.

Jawab:

1. *Titik potong dengan sumbu X*:
   Grafik f(x) tidak memotong sumbu X, sebab f(x) tidak mungkin bernilai nol. (perhatikanlah bahwa persamaan kuadrat $x^2 + 1$ tidak mempunyai nilai nol).
2. *Titik potong dengan sumbu Y*:
   $x = 0 \Rightarrow f(0) = -3$ Berarti, grafik memotong sumbu Y di titik (0, –3).
3. *Asimtot tegak*: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \rightarrow$ Asimtot tegaknya ialah garis x = 1.
4. *Asimtot miring*: $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1} = x + 1 + \dfrac{4}{x-1}$
   Berarti, asimtot miringnya adalah y = x + 1.
5. *Titik balik*: $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2+3}{x-1} \\ y = m \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2+3}{x-1} = m \Leftrightarrow x^2 + 3 = mx - m \Leftrightarrow x^2 - mx + (m + 3) = 0$

   $\left.\begin{array}{l} D = m^2 - 4m - 12 \\ D = 0 \text{ (syarat adanya titik balik)} \end{array}\right\} \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow (m-6)(m+2) = 0$

   $\Leftrightarrow m = 6$ atau $m = -2$

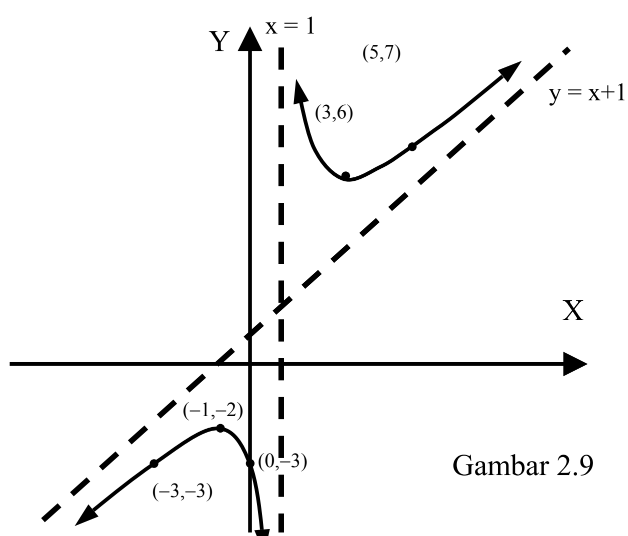
   Untuk m = 6, dari persamaan (1) diperoleh x = 3.
   Untuk m = –2, dari persamaan (1) diperoleh x = –1.

   D > 0 D < 0 D > 0
   m = –2 m = 6

   Berarti titik baliknya adalah (–1, –2) sebagai titik balik maksimum dan (3,6) sebagai titik balik minimum.
6. *Titik-titik bantu*:

x	–3	0	2	5
f(x)	–3	–3	7	7
Titik	(–3, –3)	(0, –3)	(2,7)	(5,7)

Berdasarkan (1) sampai dengan (6), grafiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 2.9

Dengan melihat grafik pada Gambar 2.9, maka DH = {y | y < -2 atau y > 6}.

LATIHAN 3

Gambarlah grafik dari fungsi-fungsi berikut, dan kemudian tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

6. $f(x) = \dfrac{5}{2x - 3}$
7. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 1}$
8. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 3}$
9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 4}$
10. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x^2 + x - 1}$

6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x + 2}$
7. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 5x + 4}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 20}{x - 4}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.
10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$

BAGIAN III
FUNGSI MODULUS DAN GRAFIKNYA

A. NILAI ABSOLUT (MUTLAK)

Definisi

Jika x adalah bilangan real, nilai mutlak (absolut) x, ditulis | x |, didefiniskan sebagai $\sqrt{x^2}$; di samping "nilai mutlak", digunakan juga ungkapan *modulus* dan *norm.*

Dari konsep akar kuadrat non negatif suatu bilangan real maka konsekuensi logis dari definisi di atas adalah:

$| x | = x$ untuk $x \geq 0$,
$| x | = -x$ untuk $x < 0$

dan untuk setiap x berlaku:

$- \quad | x | \leq x \leq | x |$

Contoh 1: $| 0 | = 0$, $| 4 | = 4$, $| -3 | = 3$, $\left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5}$

Dari garis bilangan | x | menyatakan jarak dari x ke 0, yang selalu bernilai non negatif.

Teorema

Jika x dan y bilangan-bilangan real, maka:

(i) $| x | \geq 0$
(ii) $| x | = 0$ jika dan hanya real, maka:
(iii) $| xy | = | x | . | y |$
(iv) $| x + y | \leq | x | + | y |$
dan $| x + y | = | x | + | y |$ jika dan hanya jika x dan y keduanya non negatif atau keduanya non positif.

Bukti:

i) Jelas dari definisi
ii) Jika x = 0 maka $| x |^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dari keduanya diperoleh: $| x | = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

iii) $(| x | | y |)^2 = | x |^2 | y |^2$ (kuadrat perkalian dua bilangan non negatif)
$= x^2 y^2$
$= (xy)^2$
$= | xy |^2$

$| x | | y | = | xy |$ (akar kuadrat bilangan non negatif).

iv) Kedua ruas dalam $| x + y | \leq | x | + | y |$ (yang dibuktikan) adalah non negatif. Karena itu kebenarannya dapat dibuktikan melalui masing-masing kuadratnya.

Perhatikan yang berikut ini:

$| x + y | \leq | x | + | y |^2 - (x + y)^2 = | x |^2 + 2 | x | | y | + | y |^2 - (x + y)^2$
$= x^2 + 2 | x | | y | + y^2 - x^2 - 2xy - y^2$
$= 2(| x | | y | - 2xy)$
$= 2(| x y | - xy | \geq = 0$

Berarti $(| x | + | y |)^2 - | x + y |^2 \geq 0$ dan sesuai keterangan di atas $| x | + | y | \geq x + y$. Dalam pembuktian menunjukkan bahwa kesamaan terjadi jika $| xy | - xy = 0$ atau jika $xy = | xy |$. Ini terjadi hanya dan jika hanya xy = 0.

B. FUNGSI MODULUS ATAU FUNGSI NILAI MUTLAK DAN GRAFIKNYA

Nilai mutlak x, dilambangkan dengan | x | didefinsikan sebagai:

$$| x | = \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh:

Gambarlah grafik yang persamaannya:

a. $y = | x |$
b. $y = 2 + | x |$
c. $y = | 2 + x |$
d. $| y | = 2 + | x |$,
(semuanya: $x, y \in R$)

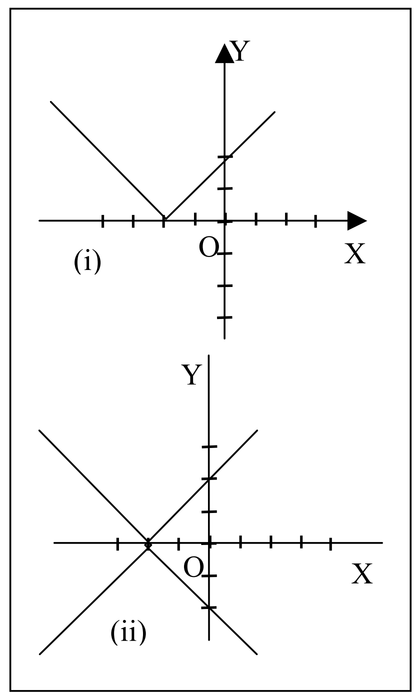
Jawab:

a. $y = | x |$
Untuk $x \geq 0$, persamaan menjadi $y = x$ (1)
Untuk $x < 0$, persamaan menjadi $-y = x$ (2)
atau $y = -x$
Grafik tampak pada gambar 3.1.(i)
Amatilah pada bagian grafik (1) dan (2) sesuai uraian di atas

b. $y = 2 + | x |$
Untuk $x \geq 0$, persamaan menjadi $y = 2 + x$. (1)
Untuk $x < 0$, persamaan menjadi $y = 2 - x$ .. (2)
Grafik tampak pada gambar 3.1 (ii)
Amatilah, ada bagian grafik (1) dan (2) sesuai uraian di atas

c. $y = | 2 + x |$
Untuk $2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x > -2$
persamaan menjadi $y = 2 + x$
Untuk $2 + x < 0 \Leftrightarrow x < -2$
persamaan menjadi $y = 2 + x$
Grafik tampak pada gambar 3.2. (i)

d. $| y | = 2 + x |$
Untuk $y \geq 0$ dan $2 + x \Leftrightarrow x \geq -2$
$y \geq 0$ dan $2 + x \geq 0$
persamaan menjadi $y = 2 + x$
Untuk $2 + x \leq 0$
persamaan menjadi $y = -x - 2$
Untuk $y < 0$ dan $2 + x \geq 0$.
persamaan menjadi $-y = 2 + x$
$y = -x - 2$
Untuk $y < 0$ dan $2 + x < 0$
persamaan menjadi $-y = -(2 + x)$
$y = x + 2$
Garfik tampak pada gambar 3.2. (ii).

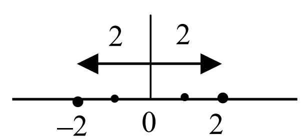


Gb. 3.2

C. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN NILAI MUTLAK

Persamaan dan pertidaksamaan nilai mutlak dapat diselesaikan dengan menjadikan tanda nilai mutlaknya melalui (1) pengkuadratan, (2) penerapan konsep nilai mutlak atau (3) grafik. dalam banyak hal juga sangat membantu jika konsep nilai mutlak ditinjau secara geometris sebagai suatu jarak. Misalnya:

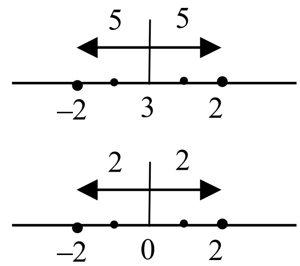
$| x | = 2$ atau $| x - 0 | = 2$ diinterpretasi sebagai kedudukkan titik yang berjarak 2 terhadap titik 0.
Ini berarti $0 - 2$ (ke kiri) atau $0 + 2$ (ke kanan), yaitu -2 atau 2.



$| x - 3 | = 5$ diinterpretasi sebagai kedudukan titik yang berjarak 5 terhadap titik 3. Ini berarti $3 - 5 = - 2$ atau $3 + 5 = 8$.

$| x \ | < 2$ atau $| x - 0 | < 2$ diinterpretasi sebagai titik yang berjarak kurang dari 2 satuan dari 0. Ini melibatkan semua titik pada garis bilangan dalam interval terbuka $(-2, 2)$.

$| x - a | < b, b > 0$, diinterpretasi sebagai titik yang berjarak kurang dari b satuan dari a. Ini melibatkan semua titik pada garis bilangan dalam interval terbuka $(a - b, a + b)$.



Gb. 3.3.

Selanjutnya dapat dipahami bvahwa untuk setiap $b \geq 0$:

$| x | = b, b > 0 \ \Leftrightarrow \ -b \leq x \leq b$. Jika $b = 0$, maka $x = 0$

$| x - c | = b \ \Leftrightarrow \ x = c - b$ atau $x = c + b$

$| x - c | \leq b \ \Leftrightarrow \ c - b \leq x \leq c + b$

$| x - c | \geq b \ \Leftrightarrow \ x \leq c - b$ atau $x \geq c = b$.

Dalam penyelesaian persamaan/pertidaksamaan dengan pengkuadratan perlu diingat bahwa $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ berlaku hanya jika a dan b adalah bilangan-bilangan non negatif. Beberapa hal yang dapat membantu untuk diantaranya bahwa untuk setiap $p \geq 0$ berlaku:

1) $x^2 = p \ \Leftrightarrow \ x = \pm \sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p}$
2) $x^2 \leq p \ \Leftrightarrow \ \sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p}$
3) $x^2 \geq p \ \Leftrightarrow \ x \leq -\sqrt{p}$ atau $x \geq \sqrt{p}$

Contoh 3:

Tentukan himpunan penyelesaian $| 4 - | x | | = 1, x \in R$.

Jawab:

Cara I:

$| 4 - | x | = 1$

$\rightarrow | 4 - | x | |^2 = 1^2$

$\Leftrightarrow 16 - 8 | x | + x^2 = 1$

$\Leftrightarrow 8 | x | = x^2 + 15$

$\Leftrightarrow 64x^2 = x^4 + 30x^2 + 225$

$\Leftrightarrow x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 9)(x^2 - 25) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)(x - 5)(x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ atau $x = 3$ atau $x = 5$ atau $x = -5$

Himpunan penyelesaiannya $\{-5, -3, 3, 5\}$

Cara II:

$| 4 | x | | = 1$

$\Leftrightarrow 4 - | x | - 1$ atau $4 - | x | = -1$

$\Leftrightarrow -| x | = -3$ atau $-| x | = -5$

$\Leftrightarrow -| x | = - 3$ atau $| x | = 5$

$\Leftrightarrow x = 3$ atau -3 atau

$x = 5$ atau $x = -5$

Himpunan penyelesaian:

$\{-5, -3, 3, 5\}$

Contoh 4

Tentukanlah himpunan penyelesaian $\left|2x + 1\right| = \left|x - 5\right|$

Jawab:

Cara I: $\left|2x + 1\right| = \left|x - 5\right| \Leftrightarrow \pm (2x + 1) = \pm (x - 5)$

Dari persamaan di atas ada 4 kasus yaitu:

$(2x + 1) = (x - 5)$ ……………………………….. (1)

$(2x + 1) = -(x - 5)$ ……………………………… (2)

$-(2x + 1) = (x - 5) \Leftrightarrow (2x + 1) = -(x - 5)$ ……… (3) $\Leftrightarrow$ (2)

dan $-(2x + 1) = -(x - 5) \Leftrightarrow (2x + 1) = (x - 5)$ ……… (4) $\Leftrightarrow$ (1)

Berarti hanya ada dua kasus yaitu (1) dan (2).

Jadi $(2x + 1) = (x - 5)$ atau $(2x + 1) = -(x - 5)$

$\Leftrightarrow x = -6$ atau $x = 1\frac{1}{3}$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{-6, 1\frac{1}{3}\}$

Cara II: Dengan pengkuadratan, karena kedua ruas non negatif.

$4x^2 + 4x + 1 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow 3x^2 + 14x - 24 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(3x - 4) = 0$

Jadi himpunan penyelesaiannya $\{-6,\ 1\frac{1}{3}\}$

Contoh 5

Tentukanlah himpunan penyelesaian $|3 - x| \geq 1$

Jawab:

Cara I:

$|3 - x| \geq 1$

$\Leftrightarrow |3 - x|^2 \geq 1^2$

$\Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 2$ atau $x \geq 4$

Himpunan penyelesaiannya:

$\{x \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 4,\ x \in R\}$

Cara II:

$|3 - x| \geq 1$

$\Leftrightarrow |3 - x|^2 \geq 1^2$

$\Leftrightarrow 3 - x \leq -1$ atau $3 - x \geq 1$

$\Leftrightarrow -x \leq -4$ atau $-x \geq -2$

$\Leftrightarrow x \geq 4$ atau $x \leq 2$

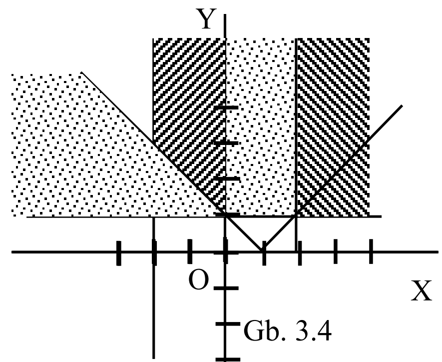
Himpunan penyelesaian:

$\{x \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 4,\ x \in R\}$

Cara III

Perhatikan grafik $y = |3 - x|$ dan garis $y = 1$

$|3 - x| \geq 1$ digambarkan dalam daerah terarsir (tebal) yang berkaitan dengan $x \leq 2$ atau $x \geq 4$



Gb. 3.4

Latihan 3.1

1. Jika $x \in R$ dan $n \in A$ (a = himpunan bilangan asli) tunjukkanlah bahwa $|x^n| = |x|^n$
2. Jika $x, y \in R$, tunjukkanlah bahwa $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$
3. Jika n dan m bilangan-bilangan bulat dan $|n - m| < 1$, nyatakan kesimpulan Anda
4. Nyatakan penyelesaiannya dalam bentuk paling sederhana

a. $|x - 3| = 5$	e. $|x^2 - x| > 2$	i. $|x + 1| - |x - 1| < 1$
b. $|2x - 1| = |x - 4|$	f. $|3 + 4x - 2x^2| < 3$	j. $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| \geq 3$
c. $|x^2 - x| = 2$	g. $|2x + 1| \geq |x - 4|$	k. $\left|\frac{1}{x}\right| \geq 1,\ x \neq 0$
d. $|x + 2| > 1$	h. $|x| + |x - 1| \leq 1$	l. $\left|\frac{1}{x+1}\right| \geq 1$

DAFTAR PUSTAKA

Abdul Kadir dan M. Goenara. 1952. ***Aljabar Untuk SMA***. Jakarta: J.B. Wolters.

Abrahamson, B & Gray, M.C. (1971). *The Art of Algebra*. Adelaide: Rigby Limited.

Alders, C.J. 1961. ***Ilmu Aljabar*** (disadur oleh H. Soemantri). Jakarta: Noer Komala.

Angel, Alllen & Porter, Stuart. (1985). *A Survey of Mathematics with Applications.* New York: Addison Wesley Publishing Company.

Ayres, F., Jr. 1958. ***First Year College Mathematics: Scaum's Outline Series***. New York: McGraw-Hill Company.

Coleman, A.J., dkk. 1979. ***Algebra: Second Edition***. Toronto: Gage Publishing Company.

Crosswhite et al. (1983) *Pr Calculus Mathematics.* Columbus Ohio: Charles E Merril Publishing Co.

Del Grande, J.J dan J.C. Egsgard. 1979. ***Elements of Modern Mathematics: Relations (Second Edition)***. Toronto: Gage Publishing Company.

Gellert W. Et Al (1977). *The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics.* New York: van Nostrand Reinhold Company.

Lipschutz, S. 1981. ***Set Theory and Related Topics***. ***Scaum's Outline Series.*** Singapura: McGraw-Hill International Book Company.

Purcell, E.J dan D Varberg. 1989. ***Kalkulus dan Geometri Analitis***. (Disadur oleh I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh). Jakarta: Erlangga.

Swokowski, E. W. 1977. ***Functions and Graphs: Second Edition***. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt Inc.

Wijdeness, P., dkk (tt). ***Ilmu Ajabar Buat Sekolah Menengah***. Jakarta: Noordhoff-Kolff N.V.

Zuckerman, Martin M. (1985). ***Algebra and Trigonometry, A Straigtforward Approach***. New York: John Wiley & Sons Ltd.