BILANGAN ASLI, CACAH DAN BULAT

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SD
Jenjang Lanjut
Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika

Oleh:
Drs. Marsudi Raharjo, M. Sc. Ed.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

==

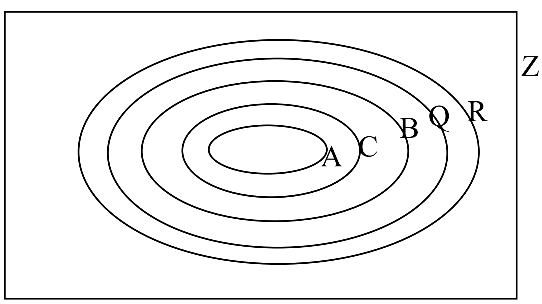
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

DAFTAR ISI

BAGIAN I
STRATA BILANGAN

KLASIFIKASI BILANGAN

Dalam matematika bilangan seperti halnya titik, garis, dan bidang merupakan konsep awal (primitive concept), yakni unsur yang bersifat mendasar, sering dipakai tetapi tidak pernah dapat didefinisikan secara tepat. Sehingga bila ditanyakan apakah bilangan itu? Jawabnya tak akan pernah tepat dan selalu saja dapat didebat. Tetapi jika yang ditanyakan adalah bilangan asli, atau bilangan cacah, jawabannya jelas dan tertentu. Bilangan asli (bilangan ordinal) misalnya ialah bilangan yang dimulai dari satu, dua, tiga, dan seterusnya hingga tak terbatas. Bilangan cacah (bilangan kardinal) adalah bilangan yang dimulai dari nol, satu, dua, tiga dan seterusnya hingga tak terbatas. Bilangan bulat ialah bilangan yang tidak pecahan, dapat positif, nol, maupun negatip. Bilangan rasional ialah bilangan yang terdiri dari bilangan bulat maupun bilangan pecah, yakni bilangan yang dapat dinyatakan sebagai pembagian dua bilangan bulat. Bilangan real ialah bilangan yang memuat bilangan rasional dan bilangan irrasional (tak rasional). Sedangkan bilangan kompleks ialah bilangan yang memuat bilangan real dan bilangan tak real (imaginer). Dalam diagram Venn gambarannya adalah sebagai berikut.



A : himpunan bilangan asli
C : himpunan bilangan cacah
B : himpunan bilangan bulat
Q : himpunan bilangan rasional
R : himpunan bilangan real
Z : himpunan bilangan kompleks

atau

A = {1, 2, 3, 4, …, }
C = {0, 1, 2, 3, 4, …}
B = { …, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}
$Q = \{ x | x = \frac{a}{b}$ dengan a, b, $\in B\}$
R = {x| x = a, d_1 $d_2 d_3 d_4$ … dengan a $\in$ B dan d_1, d_2, d_3, ….
adalah digit yang nilainya 0, 1, 3, …, atau 9}
Z = {x|x = a + bi dengan a, b $\in$ R dan i $\sqrt{-1}$ }

OPERASI DASAR PADA BILANGAN

Operasi dasar pada bilangan adalah (+, -, ×, :) yakni operasi yang diterapkan pada 2 buah bilangan sehingga diperoleh hasil bilangan tertentu (tunggal). Sebagai contoh misal 2 + 3 = 5, 4 – 1 = 3, 3 × 5 = 15 , 35 : 7 = 5 dan lain-lain. Karena adanya operasi tersebut maka lingkup bilangan yang dibicarakan menjadi berkembang yakni mulai dari bilangan asli, cacah, bulat hingga ke bilangan kompleks. Operasi yang dilakukan terhadap 2 bilangan yang menghasilkan bilangan tunggal dan tetap pada kelompoknya disebut operasi yang tertutup. Gambaran ringkasnya seperti berikut.

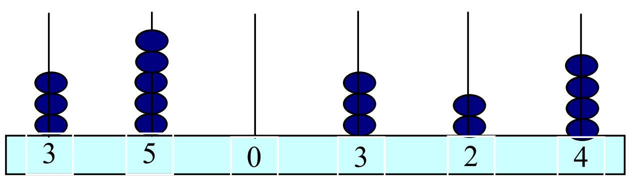
No.	Himpunan	Operasi yang Tertutup	Alasan Pengembangan
1.	Bilangan Asli (A)	+, ×	Bersifat dasar
2.	Bilangan Cacah (C)	+, ×	Kenalnya bilangan nol
3.	Bilangan Bulat (B)	+, ×, -	Operasi pengurangan dapat tertutup
4.	Bilangan Rasional (Q)	+, ×, -, :	Semua operasi dapat tertutup
5.	Bilangan Real (R)	+,×, -	Setiap titik pada garis bilangan bersesuaian dengan setiap nilai bilangan real.
6.	Bilangan Kompleks (Z)	+, ×, -, :	Setiap persamaan kuadrat mempunyai penyelesaian.

BAGIAN II
PENGAJARAN BILANGAN DAN OPERASINYA

A. KARAKTERISTIK BILANGAN SECARA DIDAKTIK

Di SD pengertian bilangan didasarkan pada banyaknya benda dalam kumpulan. Bilangan 1 s.d. 5 bersesuaian dengan banyaknya jari pada sebuah tangan. Bilangan 6 s.d. 10 bersesuaian dengan banyaknya jari pada tangan kiri dan selebihnya ada di tangan kanan. Bilangan 11 s.d. 20 siswa mulai dikenalkan dengan nilai tempat puluhan dan satuan, fakta dasar (penjumlahan 2 bilangan satu angka), dan cara membaca yang khas seperti sebelas, duabelas, tigabelas dan seterusnya bukannya sepuluh satu, sepuluh dua, dan seterusnya.

Bilangan 21 s.d. 99 memiliki kekhasan membaca dan bila diperagakan dalam bentuk gambar puluhan berbentuk batangan dan satuan berbentuk petak-petak persegi yang terpisah. Bilangan 100 s.d. 999 memiliki kekhasan dalam peragaannya yakni ratusan yang berbentuk luasan persegi. Bilangan 1000 s.d. 9999 kekhasan yang dimiliki dalam peragaannya memuat kubus yang berukuran $10 \times 10 \times 10$. Selanjutnya secara geometri bilangan di atas 9999 sudah tidak dapat diperagakan lagi. Cara yang dapat ditempuh kemudian adalah menggunakan dekak-dekak yang melambangkan nilai tempat satuan, puluhan, ratusan, ribuan dan seterusnya dimana setiap 10 satuan pada batang sebelah kanan dapat ditukar dengan 1 satuan pada batang yang tepat berada sebelah kirinya.



Bilangan yang diperagakan adalah 350.324

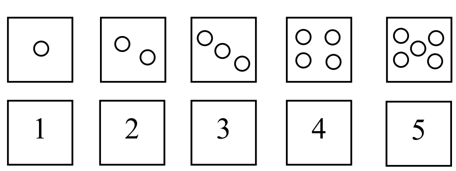
B. PENGAJARAN BILANGAN DAN LAMBANGNYA

Langkah-langkah pengajarannya.

1. Peragaan membilang 1 s.d. 5
2. Peragaan mengenal bilangan berdasarkan banyaknya benda dalam kumpulan (diawali dengan bilangan 1 s.d. 5)
   a. secara urut
   b. secara acak

   Catatan:
   Apabila secara urut sudah lancar dilanjutkan secara acak hingga lancar. Apabila peragaan secara acak sudah lancar berarti penanaman konsep bilangan sebagai banyaknya benda dalam kumpulan sudah tercapai.
3. Peragaan mengenal lambang bilangan (diawali bilangan 1 s.d. 5)
   a. secara urut
   b. secara acak

   Catatan:
   1) Peragaan awal adalah memasangkan antara banyaknya benda dalam kumpulan sebanyak 1 hingga 5 dengan lambang bilangan 1 hingga 5 seperti berikut.



   2) Peragaan berikutnya barulah pada angka-angkanya saja yang ditempel dipapan planel penempelan dilakukan secara urut kemudian acak seperti

pada langkah 2. Apabila peragaan secara acak saja sudah lancar berarti angka 1 s.d. 5 sudah tertanam pada pikiran siswa.

4. Menulis lambang bilangan
   a. di udara atau di dinding tanpa bekas goresan.
   b. di buku tulis

   Catatan:
   1) Pengajaran bilangan 6 s.d. 10 dilakukan dengan cara yang sama seperti langkah 1 hingga 4 dan dilakukan setelah siswa mengenal bilangan nol.
   2) Pengajaran bilangan nol setelah operasi pengurangan

C. PENGAJARAN AWAL PENJUMLAHAN

Pengajaran awal penjumlahan dilakukan di kelas I/1 setelah pengajaran bilangan 1 s.d. 5. Langkah-langkah pembelajarannya mengikuti teori Brunner dari kongkrit, semi kongkrit, dan terakhir abstrak.

1. Anactive (kongkrit)

Peragaan menggunakan benda-benda kongkrit yang ada di kelas seperti kapur, buku tulis, pensil, dan penggaris. Peragaannya melalui kegiatan bermain peran oleh siswa atas arahan guru. Peran yang dimainkan adalah kata-kata kunci untuk penjumlahan seperti misalnya digabung, diberi lagi, minta lagi, dan lain-lain. Persiapan guru berupa pengumpulan benda-benda kongkrit dan daftar kata-kata kunci yang akan dimainperankan, seperti misalnya

Benda-benda kongkrit	Kata-kata kunci
1. Kapur	1. digabung
2. Buku tulis	2. dikumpulkan menjadi satu
3. Pensil	3. dijadikan satu
4. Penggaris	4. diberi lagi
	5. membeli lagi
	6. minta lagi
	7. makan lagi dan lain-lain

Setiap kata-kata kunci harus dimainperankan oleh siswa dalam bentuk bermain atas arahan guru dan siswa yang lain diminta memperhatikan. Antara benda-benda kongkrit dan kata-kata kunci yang sudah disiapkan guru dapat divariasikan pemasangannya sehingga peragaan bermain peran dapat banyak dan bervariasi. Tujuannya adalah agar makna dan maksud dari bermain peran itu dapat ditangkap secara jelas oleh siswa sehingga siswa sudah terbiasa dengan soal cerita sebelum bentuk formal berupa simbol dan lambang secara matematika diberikan. Inilah yang dikatakan pembelajaran secara kontekstual di kelas I.

Contoh 1:

Benda kongkritnya *pensil* dan kata kuncinya *digabung*.

Guru memanggil dua orang siswa A dan B. A diberi tiga pensil dan B diberi dua pensil. Kedua siswa diminta menunjukkan tinggi-tinggi pensil-pensil yang dipegangnya. Guru kemudian menanyakan kepada siswa-siswa yang lain. Berapa pensil yang dipegang temanmu A? Setelah dijawab tiga, guru kemudian menulis angka 3 di papan tulis. Sesudah itu kemudian guru menanyakan berapa pensil yang dipegang temanmu B? Setelah dijawab dua, guru kemudian menuliskan angka 2 di papan tulis di sebelah kanan angka 3. Guru kemudian bertanya coba sekarang pensil A dan pensil B digabung (menggunakan kata kunci "digabung") dan serahkan semuanya pada bapak/ibu guru. Berapa pensil yang dipegang oleh pak guru (sambil memperlihatkan semua pensil yang dipegangnya). Setelah dijawab lima, guru kemudian menuliskan angka 5 di sebelah kanan angka 3 dan 2 sehingga yang tertulis di papaan tulis adalah

3 2 5

Terakhir guru menyatakan bahwa itu artinya tiga ditambah dua sama dengan lima sambil menulis tanda + dan = sehingga di papan tertulis

3 + 2 = 5

Siswa kemudian secara bersama-sama diminta menirukan ucapannya. Kegiatan mengucapkan ″3 + 2 = 5″ diulang-ulang secukupnya sampiai lancar.

Contoh 2 :

Benda kongkritnya *pensil* dan kata kuncinya *diberi lagi.*

Karena kata kuncinya diberi lagi maka yang dipanggil cukup seorang misalnya C, sedang pemain peran yang lain adalah gurunya. Siswa C diberi pensil 3 buah kemudian tanyakan kepada siswa-siswa lainnya berapa pensil yang dipegang temanmu C? Setelah dijawab tiga, guru kemudian menuliskan angka 3 di papan tulis. Selanjutnya mereka diminta memperhatikan. Sekarang *diberi lagi* pak guru (misal 1 pensil) berapa ini? Setelah dijawab satu, guru kemudian menulis angka 1 di kanan angka 3. Pertanyaan guru berikutnya adalah berapa pensil yang dipegang temanmu C sekarang? Setelah dijawab empat, guru kemudian menulis angka 4 di sebelah kanan angka 3 sehingga yang tertulis di papan tulis

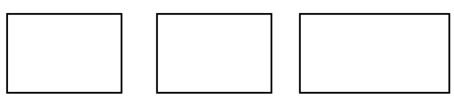
3 1 4

Guru kemudian melengkapi tanda-tandanya dengan mengatakan ″itu berarti 3 ditambah 1 sama dengan 4″ seraya menuliskan di papan tulis sehingga tampak

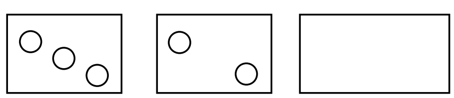
3 + 1 = 4

2. **Econic (semi kongkrit)**

Bentuk semi kongkrit peragaan penjumlahan adalah melalui peragaan di papan flanel dengan menempelkan tiga tempat pengumpulan benda.

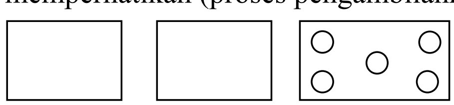


Kumpulan pertama dan kedua masing-masing diisi misalnya tiga buah dan dua buah, sehingga tampak



Tanyakan kepada siswa isinya berapa, setelah dijawab tiga dan dua guru kemudian menulis di papan tulis **3 2**

Guru kemudian meminta memindahkan isi bedna pada kedua tempat kumpulan ke tempat yang ketiga (dijadikan satu kumpulan). Siswa yang lain diminta memperhatikan (proses pengambilannya). Peragaan yang tampak di papan flanel adalah



Guru kemudian menanyakan berapa hasilnya setelah dikumpulkan menjadi satu? Setelah dijawab lima, guru kemudian mengatakan itu artinya tiga ditambah dua sama dengan lima seraya menulis secara lengkap menjadi

3 + 2 = 5

Catatan:

Proses peragaan 3 + 2 = 5 menggunakan benda-benda tiruan melalui penempelan-penempelan di papan flanel seperti misalnya ayam diganti dengan gambar ayam, gajah diganti dengan gambar gajah dan sejenisnya merupakan peragaan semi kongkrit (econic).

3. **Simbollic (abstrak)**

Tahapan abstrak adalah tahapan pengajaran yang hanya memuat angka-angka dan lambang-lambang saja seperti misalnya

$$1 + 2 = \ldots$$

$$3 + 1 = \ldots$$ dan lain-lain

Siswa dapat menjawabnya dengan berangan-angan atau menggunakan bantuan jari-jari tangannya.

D. PENGAJARAN AWAL PENGURANGAN

Perlakuan untuk mengajarkan pengurangan secara awal dilakukan sama/mirip dengan pengajaran pada penjumlahan. Berikut adalah tabel untuk benda kongkrit dan kata-kata kunci pengurangan yang akan dimainperankan.

Peraga kongkrit	Kata-kata kunci yang dapat diperagakan (dimainperankan)
1. kapur	1. dipinjam
2. buku tulis	2. diminta
	3. diberikan kepada
3. pinsil	4. diambil
4. penggaris	5. dibuang
5. balon	6. jatuh
	7. disimpan
	8. dijual
	9. kempes
	10. dan lain-lain

Peraga semi kongkrit	Kata-kata kunci yang dapat diperagakan
1. Gambar ayam	1. pergi
2. Gambar kambing	2. lari
3. Gambar kelinci	3. masuk lubang
4. Gambar burung	4. terbang
5. dan lain-lain	5. dan lain-lain

Selanjutnya kata-kata kunci yang sulit dimainperankan dan sulit diperagakan sehingga tidak direkomendasikan dalam peragaan kongkrit maupun semi kongkrit adalah.

Peraga semi kongkrit (dapat ditempel dipapan flanel)	Kata-kata kunci
1. gambar telur	1. busuk
2. gambar ayam	2. retak
3. gambar baju	3. mati
4. gambar jambu	4. soack
5. dan lain-lain	5. dan lain-lain

Catatan.

1. Pengajaran mulai dari tahapan kongkrit, semi kongkrit, hingga abstrak dilakukan sama seperti pada penjumlahan.
2. Kata-kata kunci untuk pengurangan yang sulit diperagakan boleh dimasukkan ke soal pengayaan.

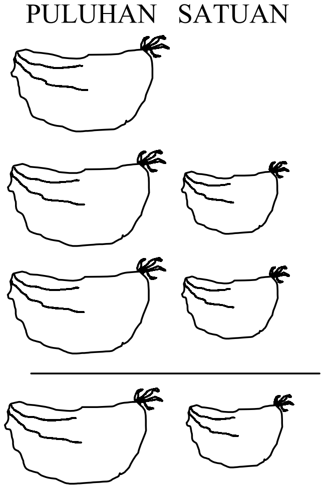
3. Bilangan nol diperagakan melalui pengurangan/pengambilan sampai habis dan diajarkan setelah pengenalan bilangan 1 s.d. 5.

E. TEKNIK MENJUMLAH DAN MENGURANG

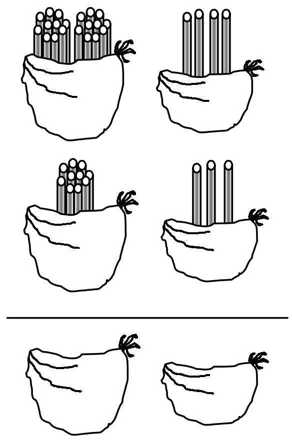
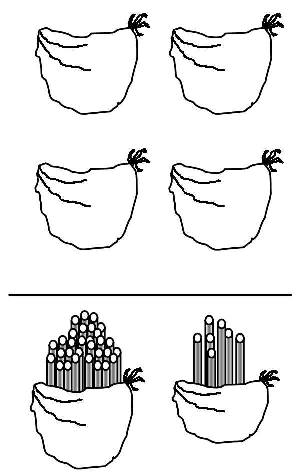
Untuk diketahui bahwa selama ini teknik penjumlahan/pengurangan di sekolah dasar masih mengalami kendala ketrampilan, padahal pengajarannya sudah dimulai sejak kelas II. Hal itu terjadi karena (1) siswa tidak segera hapal penjumlahan 2 bilanagn satu angka yang hasilnya lebih dari 10, (2) guru tidak memberikan pembelajarannya menggunakan alat peraga konkrit seperti dengan lidi/sedotan minuman dimana untuk satuan tidak diikat, untuk puluhan diikat, dan untuk ratusan berupa 10 ikat puluhan diikat menjadi satu menggunakan karet gelang, dan (3) guru belum mengetahui kata kunci untuk penjumlahan 2 bilangan satu angka yang hasilnya sama dengan 10 dan kegunaannya untuk mempercepat ketrampilan menjumlah dan mengurang khususnya yang menggunakan teknik menyimpan dan meminjam.

Pada bagian ini akan dijelaskan bagaimana memperagakan penjumlahan dan pengurangan baik tanpa teknik maupun dengan teknik menyimpan/ meminjam sehingga siswa diharapkan segera mencapai ketrampilan yang diharapkan. Peragaan penjumlahan dan pengurangan secara umum yang akan diperkenalkan pada makalah ini adalah kantong-kantong yang menunjukkan nilai tempat terdiri dari 3 pasang kantong puluhan dan satuan ditambah sebuah kantong puluhan untuk tempat menyimpan/meminjam. Sementara yang akan diisikan ke dalam kantong-kantong itu adalah beberapa satuan sedotan (tanpa diikat) yang memperlihatakan nilai satuan dan beberapa ikatan sedotan (tiap ikat berisi 10 buah sedotan) yang memperlihatkan nilai puluhan. Satuan ditempatkan di kantong satuan dan ikatan puluhan ditempatkan di kantong puluhan. Dengan begitu karena bentuknya antara satuan dan puluhan sudah tampak berbeda (satuan tidak diikat, sementara puluhannya berbentuk ikatan) maka sebenarnya tidak ada/ tidak digunakan kantongpun dapat dilakukan peragaan misal di atas meja. Namun untuk pembelajaran secara klasikal penggunaan kantong perlu yakni untuk ditempel di papan tulis (menggunakan selotip/isolasi atau lakban).

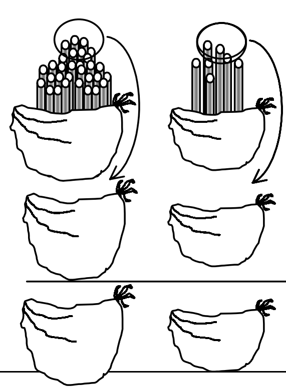
Untuk diketahui bahwa peragaan berikut merupakan sebuah alternatif bukan satu-satunya alternatif terbaik sehingga guru dapat mempertimbangkannya.

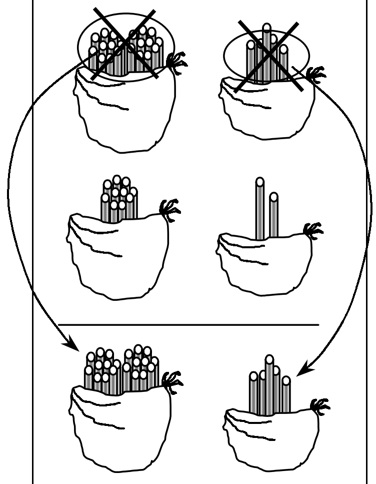
Bentuk Peragaan	**Keterangan**
PULUHAN SATUAN 	• Baris paling atas berupa sebuah kantong puluhan (dibuat lebih besar dari pada kantong satuan) merupakan tempat untuk menyimpan/ meminjam. • Barisan pertama (yang posisinya tepat di bawahnya) adalah tempat untuk memperagakan bilangan pertama. • Barisan kedua adalah tempat untuk memperagakan bilangan kedua, dan • Barisan ketiga adalah tempat untuk memperagakan bilangan hasil operasinya.

Contoh 1 (Penjumlahan biasa/tanpa teknik menyimpan /meminjam)

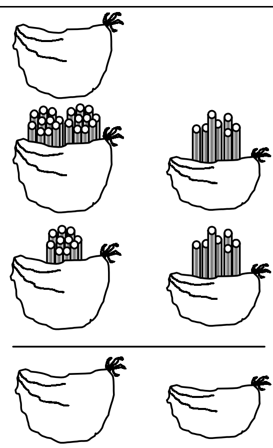
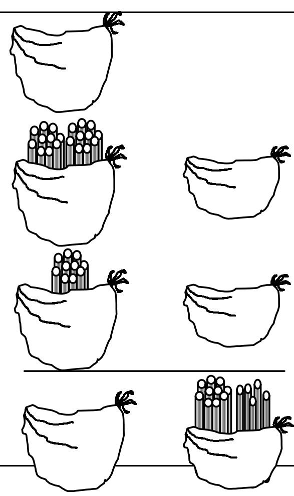
Penjumlahan yang diperagakan	Bentuk Peragaan	Proses Peragaan
24 13 + ...		<u>Langkah 1</u> • Peragakan bilangan I = 24 dengan menempatkan 2 ikat puluhan dan 4 satuan yang tak dilihat di tempat yang sesuai (pada baris pertama) • Peragaan bilangan II = 13 dengan menempatkan 1 ikat puluhan dan 3 satuan yang tak diikat di tempat yang sesuai (pada baris kedua)
		<u>Langkah 2</u> • Tanyakan kepada siswa bagaimana menjumlahkannya. Jawaban yang diharapkan adalah satuan digabung satuan kemudian diletak-kan di kantong hasil. Demikian pula untuk yang puluhan dengan puluhan Hasilnya = 37 Itu berarti 24 13 + 37

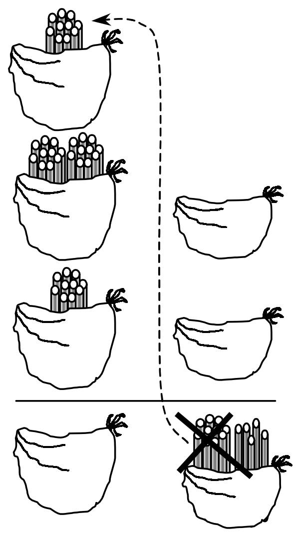
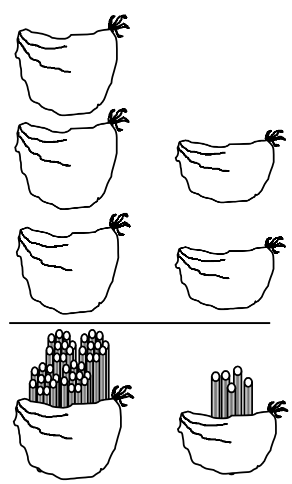
Contoh 2 (Pengurangan biasa/tanpa teknik menyimpan/meminjam)

Pengurangan yang diperagakan	Bentuk Peragaan	Proses Peragaan
37 12 -		<u>Langkah 1</u> • Peragakan bilangan I = 37 pada baris I

		<u>Langkah 2</u> • Kurangkan dari peragaan di baris I = 37 dengan mengambil 1 ikat puluhan dan 2 satuan untuk ditempatkan/dimasukkan di baris II (merupakan peragaan untuk pengurang sebanyak 12). • Sisa satuan sebanyak 5 dan sisa puluhan sebanyak 2 di baris I kemudian dipin-dahkan di kantong hasil (baris III). Tampak bahwa sisanya = 25 itu berarti 37 – 12 25

Contoh 3a (Penjumlahan dengan teknik menyimpan)

Penjumlahan yang diperagakan	Bentuk Peragaan	Proses Peragaan
27 18 + ...		<u>Langkah 1</u> • Peragakan bilangan-bilang-an yang akan ditambah yaitu 27 pada baris I dan 18 pada baris II seperti gambar disamping
		<u>Langkah 2</u> • Jumlahkan satuan-satuanya di kantong hasil. Ternyata 7 + 8 hasilnya 15. Dihitung yang 10 buah untuk diikat menjadi satu dan sisanya/ selebihnya tidak diikat

		<u>Langkah 3</u> • Letakkan 1 ikat puluhan yang tadinya di kantong hasil (tempat satuan) ke kantong tempat penyim-panan
		<u>Langkah 4</u> • Kumpulkan semua puluhan yang berbentuk ikatan ke kantong hasil sehingga di kantong hasil ada 4 ikat puluhan. Tampak bahwa hasil akhir adalah 4 ikat puluhan dan 5 satuan (peragaan untuk hasil = 45) • Itu berarti $\begin{array}{r} 27 \\ 18 \\ \hline 45 \end{array} +$

Catatan :

Perhatikan/cermati bahwa program penjumlahan (dengan teknik menyimpan) seperti itu cukup memberikan pemahaman yang utuh kepada siswa khususnya jika diulang-ulang dan siswa yang melakukannya. Namun sayang gambaran peragaan semacam itu tidak cukup membuat siswa cepat trampil menjumlah 2 bilangan 2 angka dengan teknik menyimpan. Nah bagaimana resepnya ? Kunci resepnya terletak pada hafalan jumlah 10 untuk 2 bilangan satu angka.

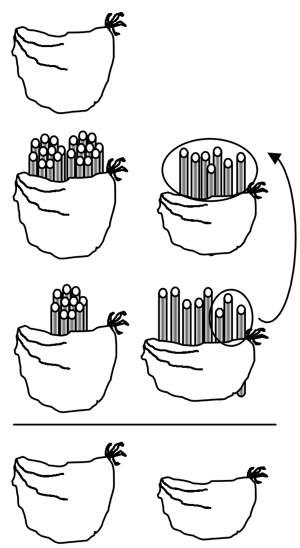
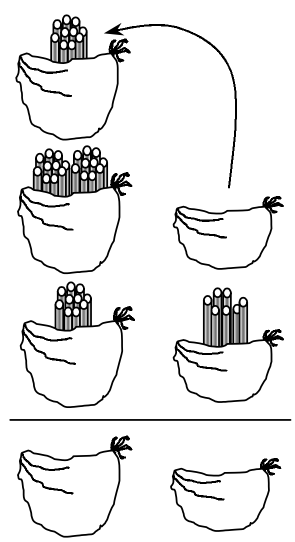
Jumlah 10

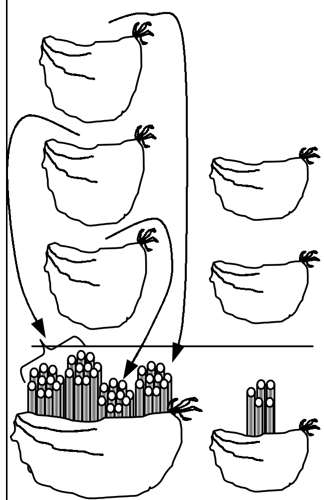
(Jumlah 2 bilangan satu angka = 10)

Cara membayangkan	Artinya
1 dengan 9 …………………SS 2 dengan 8 …………………DD 3 dengan 7 …………………TT 4 dengan 6 …………………EE 5 dengan 5 …………………LL	1 dengan 9 dan sebaliknya …… disingkat SS 2 dengan 8 dan sebaliknya …… disingkat DD 3 dengan 7 dan sebaliknya …… disingkat TT 4 dengan 6 dan sebaliknya …… disingkat EE 5 dengan 5 dan sebaliknya …… disingkat LL

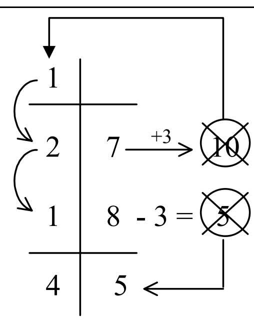
Dengan mengacu pada singkatan itu (pasangan 2 bilangan satu angka yang jumlahnya = 10) peragaan untuk menjumlahkan dengan teknik menyimpan seperti yang dikemukakan dalam contoh 3a akan menjadi lebih sederhana dan lebih cepat/lebih taktis untuk dibayangkan. Perhatikan contoh 3b.

Contoh 3b

Penjumlahan yang diperagakan	Bentuk Peragaan	Proses Peragaan
27 18 ——— + ……….		<u>Langkah 1</u> Satuan di baris I = 7 untuk menjadi 10 harus ditambah 3 (ingat TT). Tetapi untuk menambahnya diambilkan dari satuan 8 di baris II. Sehingga satuan untuk bilangan di baris II yang tadinya 8 berkurang 3 menjadi 5
		<u>Langkah 2</u> Satuan 10 yang sebelumnya ada di posisi satuan setelah diikat menjadi 1 ikatan puluhan, ikatannya kemudian ditempatkan di tempat menyimpan (kantong puluhan bagian paling atas) seperti yang diperlihatkan pada gambar

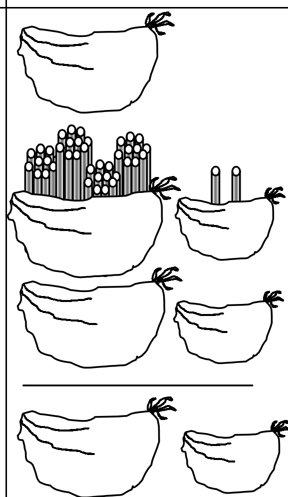
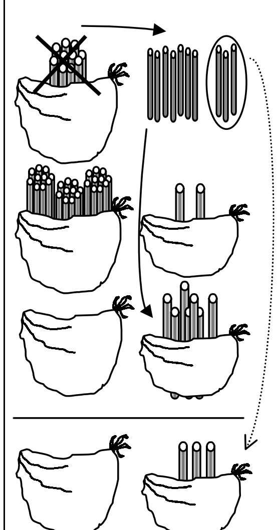
		<u>Langkah 3</u> Kumpulkan satuan-satuan sisanya yang semula ada di baris II ke kantong hasil dan kumpulkan semua ikatan puluhan (yang ada di kantong simpanan, kantong baris I, dan kantong baris II) ke kantong hasil, sehingga yang tampak pada peragaan akhir adalah 4 ikat puluhan dan 5 satuan. Peragaan ini menunjukkan bahwa: $\begin{array}{r} 27 \\ 18 \\ \hline 45 \end{array} +$

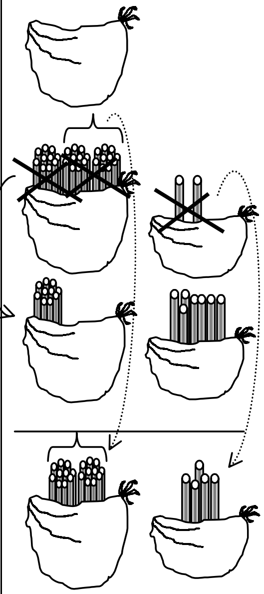
Nah sekarang masalahnya bagaimana lengkah-langkah yang diperagakan pada contoh 3b tersebut bila peragaannya tidak dilakukan secara fisik tetapi dilakukan secara mental (diangankan/dibayangkan di alam fikirkan saja). Gambaran cara membayangkannya adalah sebagai berikut :

Penjumlahan yang diperagakan	Proses cara membayangkannya
$\begin{array}{r} 27 \\ 18 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} +$	<u>Langkah 1</u> Tulis secara menurun (dalam susunan kebawah 27 + 18 = ...)
	<u>Langkah 2</u> Satuan 7 untuk menjadi 10 harus ditambah 3 (ingat TT) tetapi untuk menambah 3 itu dilakukan dengan mengurangi jatahnya satuan 8, sehingga satuan sisanya tinggal 8 – 3 = 5. Satuan sisa 5 itu kemudian dimasukkan ke kantong hasil. Sementara itu 7 + 3 = 10 itu setelah diikat kemudian dipindah ke kantong atas tempat menyimpan puluhan. Jumlahkan seluruh isi yang ada pada kantong puluhan ke kantong hasil yakni puluhan 1 + 2 + 1 = 4 masuk ke kantong hasil.

Untuk diketahui bahwa acuan jumlah 10 yang diakronimkan sebagai SS (satu sembilan), DD (dua delapan), TT (tiga tujuh), EE (empat enam) dan LL (lima lima) membantu juga untuk membelajarkan siswa mengurang dengan teknik meminjam. Peragaan kongkritnya adalah sebagai berikut

Contoh :

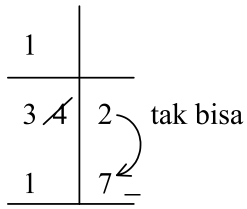
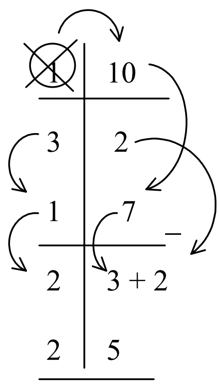
Pengurangan yang diperagakan	Bentuk peragaan	Proses Peragaan
42 17 ——— – ……..		<u>Tahap I</u> • Pasanglah peragaan 42 pada baris pertama. Dari peragaan 42 di baris I akan dibentuk bilangan pengurang 17 yang diambilkan dari peragaan 42 di baris I itu. Pengurangan di mulai dari satuan kemudian baru ke puluhan
		<u>Tahap II</u> • Kurangkan 42 dengan 17 (pertama yang dikurangkan adalah satuannya). Karena satuan 2–7 tak bisa dilakukan maka kita pinjam 1 puluhan untuk dimasukkan ke kantong tempat meminjam dan satuan 2 tak jadi dikurangi. Ikatan 1 puluhan yang semula ditempatkan di puluhan (diberi tanda silang) setelah dilepas karet ikatannya akan menjadi 10 (peragaan di kanan atas). Dari 10 kita ambil 7 untuk dimasukkan ke kantong pengurang dan sisanya 3 kita masukkan ke kantong hasil.

		<u>Tahap III</u> • Bentuklah pengurangan 17 pada baris pengurangan secara lengkap. Caranya Ambil 1 puluhan dari sisa 3 puluhan untuk di masukkan ke kantong pengurangan. Sisanya 2 puluhan di baris I masukkan ke kantong hasil. Tampak sekarang peragaan pengu-rangan 17 dari 42 secara lengkap (di kantong tempat pengurangan) • Hasil pengurangan selengkapnya adalah 2 ikat puluhan dan sisa 3 satuan ditambah satuan 2 (yang sebelumnya tak jadi dikurangi dengan 7), sehingga satuan hasil pengurangannya menjadi 3 + 2 = 5. Artinya 42 17 – 25

Nah sekarang masalahnya bagaimana langkah-langkah yang diperagakan pada contoh 4a tersebut bila peragaannya tidak dilakukan secara fisik tetapi secara mental (hanya dibayangkan di alam fikiran). Gambaran selengkapnya adalah seperti berikut:

Pengurangan dengan teknik meminjam

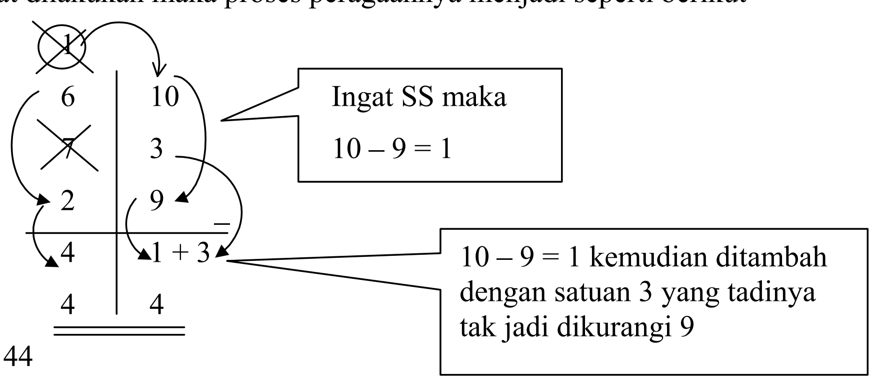
Pengurangan yang diperagakan	Proses cara membayangkan
42 – 17 = ……… 4 | 2 1 | 7 - ………	<u>Langkah 1</u> Tulis secara menurun (dalam bentuk susunan kebawah dari 42 – 17 = …………….). Beri sekat untuk memisahkan kelompok puluhan dan satuan

	Langkah 2
 	Lakukan operasi pengurangannya • Karena 2 – 7 tak bisa dilakukan maka kita pinjam 1 puluhan dengan mengurangi dari yang 4 puluhan. Sehingga yang 4 puluhan tinggal 3 puluhan sementara peminjam 1 puluhan kita letakkan di bagian atas
 	• 1 puluhan di kantong kiri setelah dilepas ikatannya akan menjadi 10 satuan dan diletakkan di tempat satuan. Kurangi sekarang yang 10 satuan itu dengan 7 (karena ingat TT) maka hasil pengurangannya adalah 3. Hasil pengurangan 3 itu kemudian ditambah dengan yang tadinya tidak jadi dikurangi yaitu 2 sehingga satuan hasilnya menjadi 3 + 2 = 5 sementara itu untuk puluhannya 3 – 1 = 2. Sehingga tampak bahwa hasil pengurangan selengkapnya adalah puluhannya 2 dan satuannya 5. Artinya 42 17 – 25

Untuk lebih menghayatinya lagi berikut ini diberikan 2 contoh bagaimana mengurang yang menggunakan teknik meminjam tanpa penjelasan lengkap. Amati dengan cermat cara penalarannya.

Contoh:

a) 73 – 29 = … ⇒ Karena satuan 3 (dari bilangan I 73) dikurangi 9 (dari bilangan II 29) tidak dapat dilakukan maka proses peragaannya menjadi seperti berikut



Jadi 73 – 29 = 44

b) 64 – 38 = ……. ⇒

1	10
5	
~~6~~	4
3	8 –
3	2 + 4
3	6

Ingat DD maka
10 – 8 = 2

Jadi 64 – 38 = 36

c) 36 + 48 = …… ⇒

1	
3	6 $\xrightarrow{+4}$ 10
4	8 – 4 = 4
8	4 +

6 untuk menjadi 10 ditambah 4, (ingat EE) tetapi menambahnya 4 dari mengambil jatahnya 8

Hasil pengurangan 8 – 4 = 4 kemudian dimasukkan ke kantong hasil

jadi 36 + 48 = 84

d) 200 – 48 = ….. ⇒

1		
1 ~~2~~	0	0
	4	8

0 – 8 tidak bisa, pinjam depannya juga tidak ada maka pinjam depannya lagi yaitu pinjam 1 ratusan

1	1	
1	9	10
	4	8 –
1	5	2

1 ratusan dilepas ikatannya mejadi 10 ikat puluhan. 10 ikat puluhan kemudian dipecah menjadi 9 ikat puluhan dan 1 ikat puluhan. Kemudian yang 1 ikat puluhan dilepas menjadi 10 satuan

Sisa pengurangan dimasukkan ke kantong hasil.
10 – 8 = 2 masuk ke kantong satuan
9 – 4 = 5 masuk ke kantong puluhan, dan sisa 1 ratusan masuk ke kantong ratusan.
Tampak hasil akhir = 152

Jadi 200 – 48 = 152

Latihan 1.

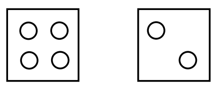
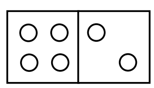
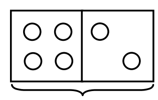
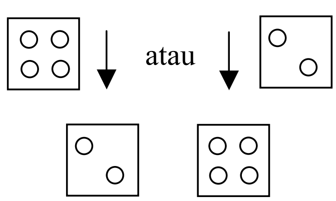
Lakukan perhitungan menggunakan kaidah jumlah 10 (SS, DD, TT, EE, dan LL) seperti yang dicontohkan untuk mencari hasil penjumlahan dan pengurangan berikut ini.

1.	46 + 38 = …	6.	73 – 28 = …
2.	39 + 27 = …	7.	64 – 29 = …
3.	55 + 28 = …	8.	93 – 49 = …
4.	149 + 38 = …	9.	201 – 74 = …
5.	245 + 168		

F. PENGAJARAN AWAL MENCARI SUKU YANG BELUM DIKETAHUI PADA KALIMAT PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN.

Materi pelajaran mencari suku yang belum diketahui pada kalimat penjumlahan peragaannya dilakukan dengan menyambung dua kumpulan benda misal masing-masing berisi 4 dan 2. Sedangkan untuk mencari suku yang belum diketahui dalam kalimat pengurangan dilakukan dengan cara memotong kedua kumpulan benda yang sudah disambung tadi.

Langkah-langkah peragannya adalah sebagai berikut.

No	Peragaan yang ditempel di papan flanel	Kalimat yang diucapkan/ditulis di papan tulis
1.		Kumpulan sebelah kiri isinya 4 dan yang kanan isinya 2.
2.	Kedua kumpulan benda disambungkan 	Jika disambungkan menjadi panjang dan semuanya ada 6. Sebelum disambung masing-masing pendek berisi 4 dan 2 sehingga 4 disambung 2 hasilnya 6. Jika ditulis di papan tulis gambarnya menjadi.  atau Jika ditulis dalam bentuk lambang menjadi $\underbrace{\boxed{4}\boxed{2}}_{6}$ dibaca 4 disambung 2 = 6 atau 4 + 2 = 6 Secara umum dapat ditulis dan digambar menjadi $\underbrace{\boxed{\text{pendek}}\boxed{\text{pendek}}}_{\text{panjang}}$ atau $\underbrace{\boxed{\text{pd}}\boxed{\text{pd}}}_{\text{pj}}$
3.	Jika sambungan dipotong menjadi 	Artinya 6 dipotong 2 = 4 atau 6 dipotong 4 = 2 sehingga $\underbrace{\boxed{4}\boxed{2}}_{6}$ dapat dibaca 4 + 2 = 6, atau 6 – 2 = 4, atau 6 – 4 = 2 atau $\underbrace{\boxed{\text{pd}}\boxed{\text{pd}}}_{\text{pj}}$ dapat dibaca pendek + pendek = panjang atau panjang – pendek = pendek

Contoh 1.

Untuk siswa kelas I, a) 5 + … = 8
b) … - 3 = 6

Jawab.

a) 5 + … = 8   berarti   5 disambung … = 8, sebab ditambah = disambung.

Karena disambung berarti komponen-komponen yang disambung adalah pendek dan hasil sambungannya panjang. Mengingat

$\underbrace{\boxed{pd}\boxed{pd}}_{pj}$ maka $\underbrace{\boxed{5}\boxed{\dots}}_{8}$ sehingga … = 8 - 5

= 3

b) .. - 3 =   berarti …   dipotong   3 = 1 sebab dikurang = dipotong

Karena dipotong berarti komponen-komponen yang dipotong adalah panjang sedang pemotong dan hasil potongannya pendek. Mengingat

$\underbrace{\boxed{pd}\boxed{pd}}_{pj}$ maka $\underbrace{\boxed{\dots}\boxed{3}}_{7}$ sehingga … = 7 - 3

= 4

Contoh 2.

Untuk siswa kelas III,   a) … + 283 = 571

b) 472 - …   = 149

Jawab.

a) … + 283 = 571 berarti   … disambung 283 = 571, sebab ditambah = disambung.

Karena disambung berarti komponen-komponen yang disambung adalah pendek dan hasil sambungannya panjang. Mengingat

$\underbrace{\boxed{pd}\boxed{pd}}_{pj}$ maka $\underbrace{\boxed{\dots}\boxed{283}}_{571}$ sehingga … = 571 - 283

= 288

b) 472 - … = 149 berarti   472 dipotong … = 149, sebab dikurang = dipotong.

Karena dipotong berarti komponen yang dipotong adalah panjang, pemotongnya pendek dan hasil potongannya pendek .
Mengingat

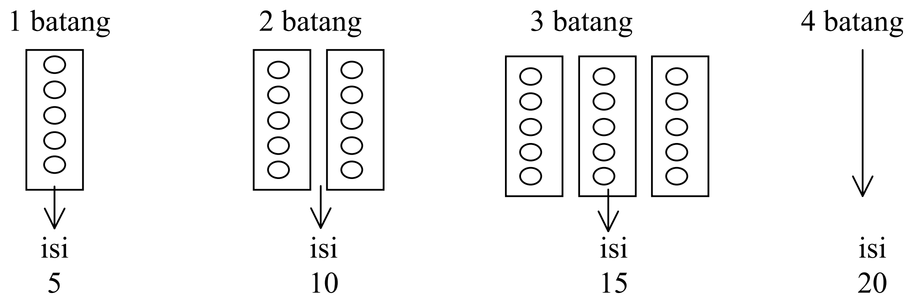
$\underbrace{\boxed{pd}\boxed{pd}}_{pj}$ maka $\underbrace{\boxed{\dots}\boxed{149}}_{472}$ sehingga … = 472 - 149

= 323

G. PENGAJARAN AWAL PERKALIAN (Kelas II/3)

1. Memahami perkalian sebagai penjumlahan berulang melalui pendekatan kontekstual

Pengajaran perkalian secara kontekstual yang perlu diberikan di awal pengajaran perkalian adalah melalui tempelan peraga berupa batangan-batangan yang berisi masing-masing 5 benda seperti berikut.



Perhatikan bahwa jawaban isi 2 batang = 10 dan isi 3 batang = 15 itu kemungkinan siswa yang satu dengan yang lain dapat berbeda cara berpikirnya (konstruksi dalam pikirannya).

2 batang isinya = 10 ….. konstruksi I: karena membilang satu demi satu diperoleh hasil = 10.
kostruksi II : 10 karena batang I = 5 di tambah batang II = 5.

3 batang isinya = 15 …. konstruksi I : membilang satu-satu hasil = 15
konstruksi II : 15 karena batang I = 5 ditambah batang II = 5 dan batang III = 5
konstruksi III: 15 karena 2 batang sebelumnya isinya = 10 ditambah batang III yang isinya 5.

Guru kemudian memberikan konfirmasi bahwa isi untuk
1 batang = 5 sebab 5 adalah fakta
2 batang = 10 sebab 10 = batang I + II = 5 + 5
3 batang = 15 sebab 15 = batang I + II + III = 5 + 5 + 5

Selanjutnya guru memberikan arahan apabila 1 batang isinya 5 artinya isi untuk:
1 batang = 1 × 5 … dibaca 1 kali 5
2 batang = 2 × 5 … dibaca 2 kali 5
3 batang = 3 × 5 … dibaca 3 kali 5
4 batang = 4 × 5 … dibaca 4 kali 5, dan seterusnya.

Dari peragaan dan bentuk perkalian di atas dapat disimpulkan bahwa isi untuk:
1 batang = 1 × 5 = 5
2 batang = 2 × 5 = 5 + 5 = 10
3 batang = 3 × 5 = 5 + 5 + + 5 = 10
4 batang = 4 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 20
5 batang = 5 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 25
6 batang = 6 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 30
7 batang = 7 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 35
8 batang = 8 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 40
9 batang = 9 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 45
10 batang = 10 × 5 = … jawaban yang diharapkan = 50

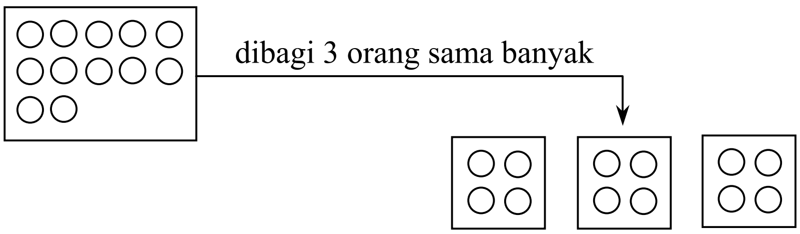
Catatan.

1. Isian selengkapnya untuk 4 batang, 5 batang dan seterusnya hingga 10 batang dikerjakan (diteruskan) oleh siswa secara kelompok.
2. Bila ada siswa yang menanyakan bagaimana kalau nulisnya tidak panjang (maksudnya hanya menuliskan hasilnya saja) sebaiknya dijawab terserah asal hasilnya benar.
3. Setelah waktu dianggap cukup guru kemudian mengadakan konfirmasi mengenai jawaban yang diharapkan.
4. Agar siswa senang dan antusias setiap kali membacakan hasil, tanyakan siapa yang benar supaya tunjuk jari.

H. PENGAJARAN AWAL PEMBAGIAN (Kelas II/2)

Untuk menyampaikan materi awal pembagian, guru kini harus melakukannya secara kontekstual. Untuk menanamkan konsep 12 : 3 = … misalnya, guru dapat menawarkan kepada siswa siapa yang bisa memperagakan membagi 12 sedotan minuman yang disiapkan kepada 3 orang temannya sama banyak. Asal dalam peragaannya masing-masing siswa temannya menerima 4 buah, maka peragaan siswa tadi sudah dianggap benar.

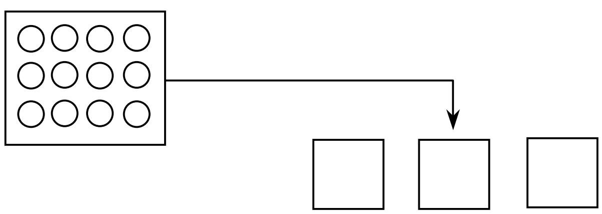
Dalam kehidupan sehari-hari, membagi 3 sama banyak diartikan sebagai membagi banyak benda dalam sebuah kumpulan kepada 3 orang sama rata. Hasil baginya adalah banyaknya benda yang diterima oleh sama rata oleh masing-masing orang. Sebagai contoh mislnya 12 dibagi 3 orang sama rata (sama banyak), maka masing-masing akan menerima 4.



Artinya 12 : 3 =

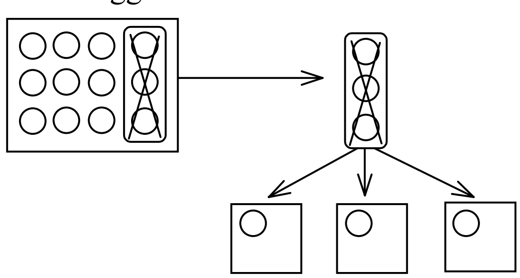
Dalam matematika, membagi 12 dengan 3 artinya setiap kali mengambil 3 buah. Hasil baginya adalah banyaknya pengambilan tiga-tiga dalam kumpulan yang banyaknya 12 anggota sampai habis. Karena 12 – 3 – 3 – 3 – 3 = 0 yakni banyaknya pengambilan 3an sampai habis ada 4 kali maka 12 : 3 = 4. Agar ketentuan secara matematika dan keadaan membagi dalam kehidupan sehari-hari sesuai, peragaan yang diberikan ke siswa adalah seperti berikut.

1. Karena dibagi 3, maka dari satu bagian yang berisi 12 kita jadikan 3 bagian.



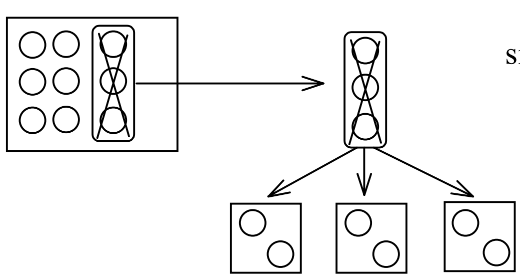
2. Karena dibagi 3 maka setiap kali pengambilan 3 anggota. Setiap pengambilan dibagi rata kepada setiap anggota sehingga

Pengambilan ke-1:



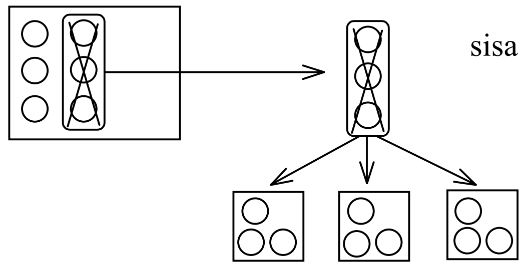
sisa pengambilan: 12 – 3 = 9

Pengambilan ke-2:



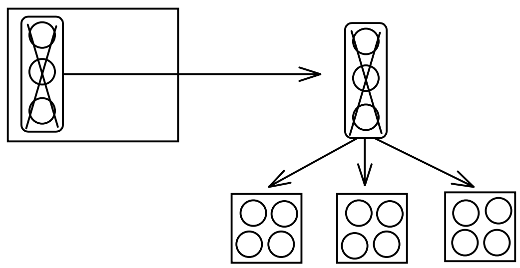
sisa pengambilan: 12 – 3 – 3 = 6

Pengambilan ke-3:



sisa pengambilan: 12 – 3 – 3 – 3 = 3

Pengambilan ke-4:



sisa pengambilan:

$12 - \underbrace{3 - 3 - 3 - 3}_{\text{ada 4 tigaan}} = 0$

Maka 12 : 3 = 4

Dari keempat langkah peragaan tersebut tampak bahwa masing-masing dari ketiga kelom-pok itu menerima 4 elemen. Itu berarti 12 : 3 = 4.

3. Setelah peragaan seperti tersebut di atas diterima siswa, guru kemudian menawarkan siapa yang dapat memperagakan dan menuliskan hasilnya utuk soal-soal berikut (bilangan yang dibagi di bawah 20 agar peragaannya mudah dan jelas untuk dilihat). Soal-soal yang diminta untuk diperagakan dan kemudian ditulis penyelesaiannya misal seperti berikut

1) 12 : 4 = …	jawaban yang diharapkan	1) 12 : 4 = 3
2) 18 : 3 = …	(dari peragaan)	2) 18 : 3 = 6
3) 15 : 5 = …		3) 15 : 5 = 3
4) 16 : 2 = …		4) 16 : 2 = 8
5) 14 : 7 = …		5) 14 : 7 = 2
6) 10 : 2 = …		6) 10 : 2 = 5
7) 6 : 2 = …		7) 6 : 2 = 3
8) 6 : 1 = …		8) 6 : 1 = 6

4. Dari data-data hasil peragaan itu, guru dapat menanyakan apa hubungan antara bilangan yang ada di depan (bilangan yang dibagi) dengan bilangan yang ada di tengah (pembagi) dan bilangan yang ada di belakang (hasil bagi). Berikan waktu kepada seluruh siswa untuk berpikir secukupnya (kurang lebih selama 2 menit). Jawaban yang diharapkan saat siswa ditanyai satu persatu adalah dikalikan, yakni:

   1) $12 : \overbrace{4 = 3}^{\times}$
   2) $18 : \overbrace{3 = 6}^{\times}$
   3) $15 : \overbrace{5 = 3}^{\times}$ dan seterusnya.

   Guru kemudian memberi pembenaran bahwa dari pola itu dapat disimpulkan bahwa:

> Dalam pembagian,
> ***bilangan yang dibagi = pembagi × hasil bagi***
> atau
> ***bilangan depan = tengah × belakang***

Karena perkalian 2 bilangan satu angka yang hasilnya sampai dengan 45 sudah ditampilkan, tidaklah sulit bagi siswa untuk menyelesaikan bentuk pembagian tanpa peragaan. Contoh-contoh soalnya antara lain seperti berikut.

1) 32 : 4 = …	5) … : 8 = 3	9) 35 : … = 7
2) 36 : 9 = …	6) … : 5 = 6	10) 30 : … = 5
3) 45 : 5 = …	7) … : 7 = 4	11) 27 : … = 9
4) 40 : 8 = …	8) … : 9 = 3	12) 24 : … = 6

5. Soal cerita pembagian

Sebagai langkah awal dari pengajaran soal ceritera pembagian, agar lebih sukses hendaknya guru mengambilkan soal-soal cerita pembagian dari soal-soal cerita perkalian yang pertama kali diberikan saat pengajaran perkalian. Diyakini lebih sukses? Karena ceritanya sama persis hanya kasus/pertanyaannya saja yang dibalik. Untuk lebih jelasnya dapat dili-hat pada tabel berikut:

Soal ceritera perkalian yang pertama kali diperkenalkan	Soal ceritera pembagian yang diadopsi dari soal perkalian itu
1. Satu sabun untuk 3 hari, 7 sabun mandi untuk … hari	1. Tujuh sabun mandi untuk 21 hari, satu sabun mandi untuk … dari
2. Satu hari menghasilkan minyak 2 liter, 5 hari menghasilkan minyak … liter	2. Lima hari menghasilkan 10 liter, satu hari menghasilkan minyak … liter
3. Satu bungkus (slob) berisi 5 bola, 8 bungkus berisi … bola	3. Delapan bungkus (slob) terdapat 40 bola. Masing-masing bungkus berisi bola sama banyak. Berapa bola isi pada setiap bungkusnya?
4. Sebuah becak memiliki 3 roda, 9 buah becak memiliki … roda	4. Sembilan becak jumlah seluruh rodanya ada 27 buah. Roda masing-masing becak sama banyak. Berapa banyak roda sebuah becak?
10. Sebuah mobil memiliki 4 roda, 7 buah mobil memiliki … roda.	10. Tujuh buah mobil jumlah seluruh roda-nya ada 28 buah. Roda masing-masing mobil sama banyak. Berapa roda setiap 1 mobil?

Perhatikan bahwa dari soal-soal perkalian itu fakta menunjukkan bahwa satu sabun mandi untuk 3 hari, satu hari menghabiskan minyak 2 liter, satu bungkus berisi 5 bola, satu buah becak memiliki roda 3 buah, dan lain-lain. dengan demikian nantinya kunci jawaban untuk soal-soal cerita pembagian yang ditulis di sebelah kanan adalah fakta-fakta yang dimaksudkan itu. Sekarang perhatikan hubungan antara teknik penyelesaian soal cerita perkalian dengan soal cerita pembagian yang bersesuaian itu.

Jawaban soal perkalian	Jawaban soal pembagian
1) 1 sabun $\rightarrow$ 3 hari 7 sabun $\rightarrow$ 7 $\times$ 3 hari = 21 hari Jadi 7 sabun habis dalam 21 hari.	1) 7 sabun $\rightarrow$ 21 hari 1 sabun $\rightarrow$ 21 hari : 7 = 3 hari Jadi 1 sabun habis dalam 3 hari.
2) 1 hari $\rightarrow$ 2 liter 5 hari $\rightarrow$ 5 $\times$ 2 liter = 10 liter Jadi 5 hari habis minyak 10 liter.	2) 5 hari $\rightarrow$ 10 liter 1 hari $\rightarrow$ 10 liter : 5 = 2 liter Jadi 1 hari habis minyak 2 liter.
3) 1 bungkus $\rightarrow$ 5 bola 8 bungkus $\rightarrow$ 8 $\times$ 5 bola = 40 bola Jadi 8 bungkus berisi 40 bola.	3) 8 bungkus $\rightarrow$ 40 bola 1 bungkus $\rightarrow$ 40 bola : 8 = 5 bola Jadi 1 bungkusnya berisi 5 bola.
4) 1 becak $\rightarrow$ 3 roda 9 becak $\rightarrow$ 9 $\times$ 3 roda = 27 roda Jadi 9 becak rodanya ada 27 buah.	4) 9 becak $\rightarrow$ 27 roda 1 becak $\rightarrow$ 27 roda : 9 = 3 roda Jadi 1 becak rodanya ada 3 buah.

Demikian seterusnya untuk soal-soal ceritera sederhana seperti itu guru dapat mempersiapkannya, dan menerampilkan siswa dengan mencongak. Dengan kerangka berfikir seperti itu diharapkan dapat mengurangi kesulitan siswa dalam menerima soal cerita.

BAGIAN III
PEMBELAJARAN KPK DAN FPB
DENGAN PENDEKATAN KONTEKSTUAL

A. Pembelajaran KPK

1. Pendekatan kontekstual untuk KPK.

(Soal tentang lampu kedip)

Misalkan terdapat sebuah lampu, berwarna merah dan sebuah lampu lagi berwarna kuning. Lampu merah berkedip setiap 2 detik sedangkan lampu kuning berkedip setiap 3 detik. Jika kedua dinyalakan bersama-sama

a. pada detik ke berapa saja kedua lampu berkedip secara bersama-sama.
b. pada detik ke berapa kedua lampu untuk pertama kalinya berkedip bersama.

2. Fasilitas yang perlu disiapkan guru

Fasilitas yang perlu disiapkan berupa lembar kerja (LK) dalam bentuk tabel seperti berikut

Lampu	Berkedip pada detik ke …																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Merah																				
Kuning																				

3. Aktifitas siswa.

Bekerja kelompok mengisi LK tersebut dengan tanda-tanda centang (✓) pada kolom-kolom yang disediakan.

Hasil kerja kelompok yang diharapkan adalah:

Lampu	Berkedip pada detik ke …																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Merah		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓
Kuning			✓			✓			✓			✓			✓			✓		

Dari tabel dapat dilihat bahwa

a. kedua lampu akan berkedip bersama-sama pada detik ke 6, 12, 18, … dan seterusnya.
b. kedua bola lampu berkedip bersama pada detik ke-6.

4. Peran guru sebagai fasilitator.

Menyiapkan soal, menyiapkan LK, mengawasi kerja kelompok, memberikan klarifikasi/kejelasan tentang jawaban mana yang benar/paling benar.

5. KPK secara matematis (oleh guru).

Soal:

Berapakah kelipatan persekutuan dari bilangan 2 dan 3?

Berapakah kelipatan persekutuan yang terkecil (KPK) dari bilangan 2 dan 3?

Jawab:

Kelipatan 2 → 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, …

Kelipatan 3 → 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, …

Kelipatan persekutuan dari 2 dan 3 adalah

6, 12, 18, 24, …

↓

terkecil

Maka KPK (2, 3) = 6.

6. ***Pemberian soal-soal lain untuk KPK (oleh guru).***

Soal:

Tentukan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari bilangan-bilangan berikut

a. 4 dan 6
b. 10 dan 15
c. 15 dan 20
d. 5 dan 10
e. 25 dan 50

Jawaban yang diharapkan adalah:

a. kelipatan persekutuan dari 4 dan 6 adalah 12, 24, 36, 48, …
sehingga KPK (4, 6) = 12.
b. kelipatan persekutuan dari 10 dan 15 adalah 30, 60, 90, …
sehingga KPK (10, 15) = 30.
c. kelipatan persekutuan dari 15 dan 20 adalah 60, 120, 180,…
sehingga KPK (15, 20) = 60.
d. kelipatan persekutuan dari 5 dan 10 adalah 10, 20, 30, …
sehingga KPK (5, 10) = 10.
e. kelipatan persekutuan dari 25 dan 50 adalah 50, 100, 150, …
sehingga KPK (25, 50) = 50.

7. ***Cara cepat memperoleh KPK (oleh guru).***

Guru mengajak siswa mengamati uraian jawaban dari 5 soal tentang KPK pada langkah 6. Ternyata

KPK = Kelipatan persekutuan yang pertama kali muncul

Dengan ciri tersebut maka uraian singkat untuk mencari KPK dari 2 bilangan adalah seperti berikut.

a. KPK (4, 6) = …

$$\left.\begin{array}{l}\text{Kelipatan } 4 \rightarrow 4,\ 8,\ 12,\ \dots \\ \\ \text{Kelipatan } 6 \rightarrow 6,\ 12,\ \dots\end{array}\right\}\ \text{KPK } (4, 6) = 12$$

12 adalah kelipatan persekutuan yang pertama kali muncul.

b. KPK (10, 15) = …

Kelipatan 10 → 10, 20, 30, …

Kelipatan 15 → 15, 30, …

KPK (10, 15) = 30

d. KPK (5, 10) = …

Kelipatan 5 → 5, 10, 15, …

Kelipatan 10 → 10, 20, …

KPK (5, 10) = 10

8. ***Pembinaan keterampilan/mencongak untuk KPK (oleh guru).***

Guru mempersiapkan soal-soal KPK dari 2 bilangan atau 3 bilangan yang bisa dicongak. Kerangka berpikir untuk mencongaknya seperti pada langkah 7 di atas. Soal-soal yang dimaksud misalnya tentukan KPK dari bilangan-bilangan.

a. 20 dan 25
b. 50 dan 75
c. 100 dan 150
d. 150 dan 200
e. 3, 4 dan 6
f. 6, 9 dan 12
g. 5, 8 dan 10
h. 15, 20 dan 30

B. Pembelajaran FPB

1. ***Pendekatan kontekstual untuk FPB.***

(Soal tentang membagi sama banyak kepada beberapa orang).

Misalkan ada 12 kerikil warna putih dan 18 kerikil warna hitam. Kerikil-kerikil itu akan dibagi sama banyak kepada beberapa orang.

Pertanyaan:

a. Yang memungkinkan kerikil-kerikil itu dapat dibagi sama banyak kepada berapa orang?

(2 orang, 3 orang, 4 orang, 5 orang, 6 orang, dan lain-lain).

b. Dari hasil-hasil penyelidikan tersebut, paling banyak kepada berapa orang kerikil-kerikil tersebut dapat dibagi secara merata (sama banyak).

c. Adakah cara yang paling singkat untuk memperoleh jawaban yang ditanyakan pada pertanyaan b?

2. ***Fasilitas yang pelru disiapkan.***

Untuk siswa setiap kelompok harus menyediakan kerikil-kerikil sesuai dengan warna dan jumlah yang dimaksud, sedangkan guru mempersiapkan LK berupa isian tentang kemungkinan-kemungkinan tentang kedua kelompok kerikil itu dapat dibagi sama banyak kepada 2 orang, 3 orang, 4 orang, 6 orang dan 8 orang seperi berikut.

2 orang A dan B

	putih	hitam
A		
B		

mungkin/tidak

3 orang A, B, dan C

	putih	hitam
A		
B		
C		

mungkin/tidak

4 orang

	putih	hitam
A		
B		
C		
D		

mungkin/tidak

6 orang

8 orang

	putih	hitam
A		
B		
C		
D		
E		
F		

mungkin/tidak

	putih	hitam
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

mungkin/tidak

3. Bentuk kegiatan.

Siswa secara berkelompok mengerjakan lembar kerja, guru mengawasi kegiatan siswa dan terakhir memberikan klarifikasi tentang jawaban yang benar. Jawaban yang diharapkan.

2 orang A dan B

	putih	hitam
A	6	9
B	6	9

mungkin

3 orang A, B, dan C

	putih	hitam
A	4	6
B	4	6
C	4	6

mungkin

4 orang

	putih	hitam
A	3	4
B	3	4
C	3	4
D	3	4

hitam sisa 2
tidak mungkin

6 orang

	putih	hitam
A	2	3
B	2	3
C	2	3
D	2	3
E	2	3
F	2	3

mungkin

8 orang

	putih	hitam
A	1	2
B	1	2
C	1	2
D	1	2
E	1	2
F	1	2
G	1	2
H	1	2
sisa	sisa 4	sisa 2

tidak mungkin
dibagi 8 orang

Kesimpulan:

Paling banyak kerikil dapat dibagi sama banyak pada 6 orang.

Guru kemudian menanyakan, adalah cara yang lebih cepat untuk memperoleh jawaban tersebut, yakni paling banyak kelereng-kelereng itu dapat dibagi sama banyak kepada 6 orang?

Jawabannya: Ada (oleh guru)

Yaitu FPB (12, 18) = 6, barulah membahas FPB secara matematika.

4. ***Pembahasan FPB secara matematika.***

FPB (12, 18) = …?

Jawab:

12
1×12
2×6
3×4

18
1×18
2×9
3×6

Dari data akan dipeorleh

Faktor dari 12 → 1, 2, 3, 4, 6, 12

Faktor dari 18 → 1, 2, 3, 6, 9, 18

Faktor persekutuan dari 12 dan 18

ialah 1, 2, 3, 6

terbesar

Maka FPB (12, 18) = 6

Sehingga 12 kerikil putih dan 18 kerikil hitam itu dapat dibagi sama banyak maksimal pada 6 orang.

Sesudah itu guru dapat memberikan soal-soal lainnya untuk dapat dikerjakan dengan cara yang sama. Siswa boleh bekerja sama dalam memecahkan masalah tersebut.

Contoh:

Paling banyak (maksimal) dapat dibagi sama banyak kepada berapa orang sekumpulan benda-benda berikut.

a. 30 kelereng merah dan 20 kelereng putih.
b. 40 bola merah dan 60 bola putih.
c. jeruk 12 buah, duku 16 buah dan rambutan 20 buah.
d. telur puyuh 40 buah, telur ayam 30 buah, telur bebek 20 buah.

Jawaban akhir yang diharapkan adalah

a. FPB (30, 20) = 10, maka maksimal kelereng-kelereng itu dapat dibagikan sama banyak kepada 10 orang.
b. FPB (40, 60) = 20, maka maksimal bola-bola itu dapat dibagikan sama banyak kepada 20 orang.
c. FPB (12, 16, 20) = 40, maka maksimal jeruk, duku, dan rambutan itu dapat dibagikan sama banyak kepada 4 orang.
d. FPB (40, 30, 20) = 10, maka maksimal telur-elur itu dapat dibagikan sama banyak kepada 10 orang.

5. ***Cara cepat menentukan FPB (oleh guru).***

Dari contoh-contoh yang telah dipelajari, siswa diajak mengamati hasilnya, ternyata nilai FPB yang dimaksud adalah

FPB = bilangan terbesar yang dapat membagi habis

bilangan-bilangan itu.

Contoh: FPB (12, 18) = …
Jawab:
3 membagi habis (tanpa sisa) bilangan 12
3 membagi habis (tanpa sisa) bilangan 18.
Tetapi FPB (12, 18) $\neq$ 3 sebab masih ada bilangan lain yang lebih dari 3 yang dapat membagi habis 12 dan 18. Bilangan itu adalah 6. Maka FPB (12, 18) = 6.

6. Pembinaan keterampilan menentukan FPB.

Kaidah yang digunakan untuk membina keterampilan, yakni menentukan FPB dari 2 bilangan atau lebih secara mencongak adalah seperti pada langkah 5. Guru kemudian memilih dan mempersiapkan bilangan-bilangan yang mudah dicongak dalam mencari FPB. Bilangan-bilangan itu misalnya:

Tentukan FPB dari
a. 20 dan 30
b. 20 dan 40
c. 25 dan 50
d. 50 dan 75
e. 100 dan 150 dan lain-lain.

Jawaban yang diharapkan secara cepat (mencongak) adalah
a. FPB (20, 30) = 10
b. FPB (20, 40) = 20
c. FPB (25, 50) = 25
d. FPB (50, 75) = 25
e. FPB (100, 150) = 50

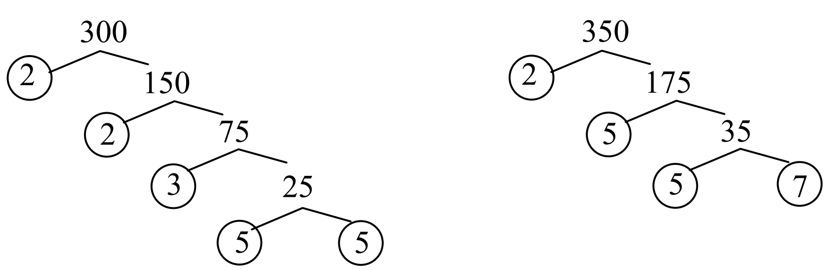
7. Menentukan KPK dan FPB dengan faktorisasi prima

Faktorisasi prima digunakan untuk menyelesaikan permasalahan mencari KPK dan FPB dari bilangan-bilangan yang sulit dibayangkan/diangankan. Namun pada contoh ini yang akan diberikan bukanlah masuk kategori bilangan-bilangan yang sulit tetapi merupakan bilangan-bilangan yang memang enak digunakan sebagai contoh. Dengan menggunakan faktorisasi prima maka KPK dan FPB dari 2 bilangan atau lebih dirumuskan sebagai berikut.

KPK = hasil kali faktor prima gabungan pangkat yang terbesar FPB = hasil kali faktor prima sekutu pangkat yang terkecil

Contoh

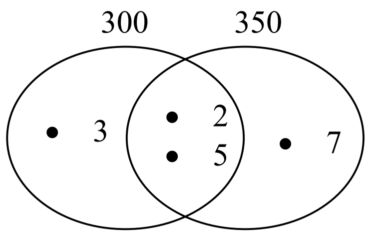
Tentukan KPK dan FPB dari bilangan-bilangan 300 dan 350.Jawab



Dengan demikian maka faktorisasi prima dari:

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$ dan $350 = 2 \times 5^2 \times 7$.

Diagram Venn yangsesuai untuk kedua bilangan itu adalah



KPK (300, 350) = hasil kali faktor prima gabungan pangkat yang terbesar.

$= 3^1 \times 2^2 \times 5^2 \times 7 = 3 \times 4 \times 25 \times 7 = 2100$

FPB (300, 350) = hasil kali faktor prima sekutu pangkat yang terkecil.

$= 2^1 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

Teknik lain untuk menentukan KPK dan FPB dari dua bilangan atau lebih juga dapat dilakukan dalam berbagai cara (Edi Prayitno, 1997) antara lain:

1. Bagilah semua bilangan itu dengan faktor/faktor prima persekutuannya
2. Setelah semua bilangan menjadi prima relatif satu sama lain (nilai FPB-nya = 1), bagilah hasil-hasilnya dengan faktor-faktor prima yang mungkin (untuk bilangan yang terbagi tentukan hasil baginya, sedang yang tak terbagi tetaplah ditulis apa adanya), hingga hasil bagi terakhirnya = 1.

Contoh

Tentukan KPK dan FPB dari bilangan-bilangan 300, 350, dan 400.

Jawab

		300	350	400
FPB	10	30	35	40
	5	6	7	8
KPK	2	3	7	4
	2	3	7	2
	2	3	7	1
	3	1	7	1
	7	1	1	1

Dari gambaran itu dapat disimpulkan bahwa:

FPB (300, 350, 400) = $10 \times 5 = 50$

KPK (300, 350, 400) = $10 \times 5 \times 2^3 \times 3 \times 7 = 8.400$

8. Terapan KPK dan FPB dalam kehidupan dan permasalahan lain yang relevan

Seperti yang telah dikemukakan sebelumnya dalam pendekatan kontekstual (di awal pembelajaran) lampu kedip merupakan salah satu terapan untuk KPK sedangkan pembagian rata yang dapat dilakukan secara maksimal pada sejumlah orang merupakan salah satu terapan dari FPB. Terapan lain yang sudah dikenal umum untuk KPK adalah dalam hal menyamakan penyebut pada operasi penjumlahan dan pengurangan pecahan. Sementara terapan FPB yang umum adalah dalam menyederhanakan pecahan ke bentuk yang paling sederhana.

Contoh

a. Hitunglah $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = ...$

b. Nyatakan dalam bentuk yang paling sederhana untuk pecahan $\frac{72}{96}$.

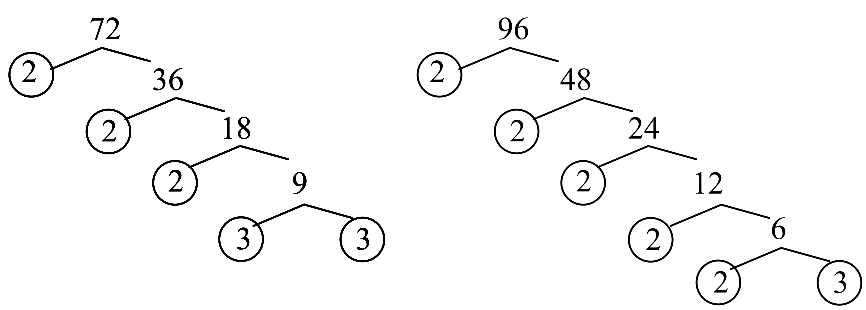
Jawab

a. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = ...$

KPK penyebut = KPK (3, 4, 6) = 12. Maka

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{...}{12} - \frac{...}{12} + \frac{...}{12} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$$

b. Dengan faktorisasi prima



Sehinga $\cancel{\frac{72}{96}} = \frac{\cancel{2\times 2\times 2}\times 3\times 3}{\cancel{2\times 2\times 2}\times 2\times 2\times 3} = \frac{3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$.

Perhatikan bahwa bagian yang dicoret adalah FPB dari 72 dan 96 yakni FPB (72, 96) = 2 × 2 × 2 × 3 = 24

Dengan begitu bila kita sudah mengetahui bahwa FPB (72, 96) = 24 maka untuk menyederhanakan pecahannya dilakukan dengan cara $\frac{72}{96} = \frac{72:24}{96:24} = \frac{3}{4}$.

Ada contoh terapan lainnya yang cukup menarik untuk pelajaran matematika SD adalah terapan KPK dalam perhitungan jarak, waktu, dan kecepatan.

Contoh 1

Ali bersepeda dari kota P ke kota Q dengan kecepatan rata-rata 20 km/jam berangkat pukul 07.00. Satu setengah jam kemudian Budi menyusul Ali menggunakan sepeda motor dengan kecepatan 30 km/jam. Pada km berapa dan pada pukul berapa Budi menyusul Ali?

Jawab

Selisih waktu perjalanan antara Ali dan Budi = $1\frac{1}{2}$ jam. Selisih waktu itulah yang nantinya akan dipakai sebagai dasar perhitungan KPK. Perhatikan bahwa:

Ali 1 jam menempuh jarak 20 km $\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$ jam = $1\frac{1}{2} \times 20$ km = 30 km.

Budi 1 jam menempuh jarak 30 km $\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$ jam = $1\frac{1}{2} \times 30$ km = 45 km.

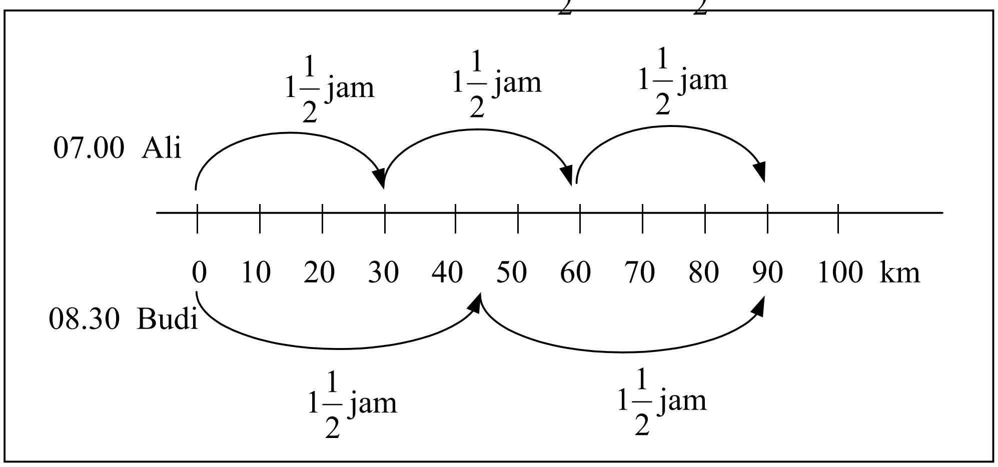


Diagram jarak, waktu, dan kecepatan yang digambarkan di atas ternyata cukup dapat memberikan kejelasan bahwa

a) Budi menyusul Ali tepatnya pada km 90 = KPK (30, 45)

b) Waktu Budi menyusul Ali adalah

- Untuk Ali waktu dihitung dari pukul 07.00, yakni

  pukul 07.00 + 3 × $1\frac{1}{2}$ jam = 07.00 + $4\frac{1}{2}$ jam = 11.30

- Untuk Budi waktu dihitung dari pukul 08.30, yakni

  pukul 08.30 + 2 × $1\frac{1}{2}$ jam = 08.30 + 3 jam = 11.30

Contoh 2

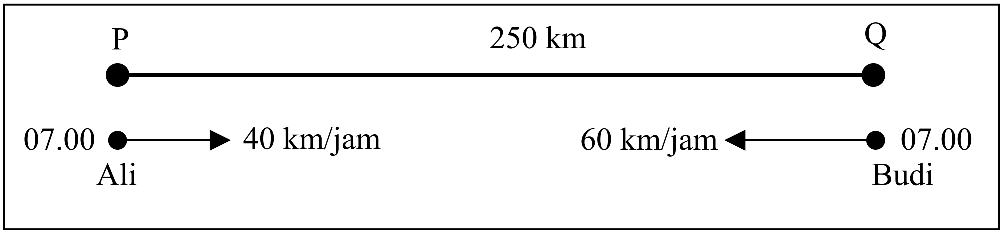
Ali bersepeda motor berangkat dari kota P pukul 07.00 menuju kota Q yang berjarak 250 km dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Pada saat yang bersamaan Budi berangkat dari kota Q menuju kota P dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam.

Pertanyaan

a. Pada km berapa dan pada pukul berapa Ali dan Budi berpapasan di jalan?

b. Jika waktu berangkatnya tidak bersamaan, yaitu Ali berangkat pukul 07.00 sementara Budi berangkatnya pukul 08.30. Pada km berapa dan pukul berapa Ali dan Budi berpapasan di jalan?

Jawab



a. Ali 1 jam menempuh jarak 40 km (dari kiri)

Budi 1 jam menempuh jarak 60 km (dari kanan)

Ali dan Budi 1 jam menempuh jarak 100 km.

Karena jarak yang harus mereka tempuh berdua = 250 km maka waktu tempuhnya = $\frac{250}{100}$ jam = $2\frac{1}{2}$ jam. Itu berarti Ali dan Budi berpapasan di jalan setelah keduanya melakukan perjalanan selama $2\frac{1}{2}$ jam yakni

pukul 07.00 + $2\frac{1}{2}$ jam = 09.30.

Tempat keduanya berpapasan adalah

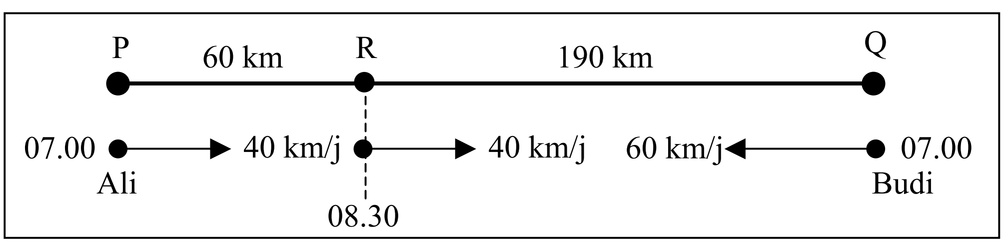
Ali = $40\frac{\text{km}}{\text{jam}} \times 2\frac{1}{2}$ jam = 100 km (dari kiri/dari kota P)

Budi = $60\frac{\text{km}}{\text{jam}} \times 2\frac{1}{2}$ jam = 150 km (dari kanan/dari kota Q)

\+

Total = 250 km

b.



Karena waktu berangkatnya tidak sama maka perhitungannya dimulai dari saat keduanya mulai berjalan, berarti pukul 08.30 yaitu $1\frac{1}{2}$ jam dari Ali mulai bergerak barulah Budi mulai bergerak.

Dari pukul 08.30

Ali telah menempuh jarak $40\frac{\text{km}}{\text{jam}} \times 1\frac{1}{2}$ jam = 60 km (tiba di R). Kini jarak yang harus ditempuh keduanya = 250 km – 60 km = 190 km.

Karena 1 jam Ali dan Budi menempuh total jarak 100 km maka waktu pertemuannya dicapai saat keduanya menempuh perjalanan selama $\frac{190}{100}$ jam = 1,9 jam = 1 jam 54 menit.

Waktu keduanya berpapasan adalah

Ali = pukul 07.00 + $1\frac{1}{2}$ jam + 1 jam 54 menit
= 07.00 + 1 jam 30 menit + 1 jam 54 menit
= 10.24

Budi = 08.30 + 1 jam 54 menit
= 10.24

Jarak keduanya berpapasan adalah

$$\text{Ali} = 60\text{ km} + 40\frac{\text{km}}{\text{jam}} \times 1\frac{9}{10}\text{jam} = (60 + 76)\text{ km} = 136\text{ km}$$

$$\text{Budi} = 60\frac{\text{km}}{\text{jam}} \times 1\frac{9}{10}\text{jam} = (60 + 54)\text{ km} = 114\text{ km}$$

$$\text{Total} = 250\text{ km}$$

Latihan 3

1. Ali bersepeda dari kota A ke kota B dengan kecepatan 20 km/jam, berangkat pukul 07.00. satu setengah jam kemudian Budi menyusul berangkat dari tempat yang sama (kota A) dengan kecepatan 30 km/jam. Pada km berapa dan pukul berapa Budi menyusul Ali?
   (Kunci: km 90 pukul 11.30)
2. Dodi bersepeda motor dari kota A ke kota B yang berjarak 125 km dengan kecepatan 20 km/jam berangkat pukul 07.00. Pada saat yang bersamaan Eka berangkat dari kota B ke kota A denagn kecepatan 30 km/jam. Pada km berapa dari kota A dan pada pukul berapa keduanya berpapasan di jalan?
   (Kunci: km 50 pukul 09.30)
3. Jika untuk soal nomor 2 (jarak kota A ke kota B adalah 125 km) Eka berangkat dari kota B menuju kota A pukul 07.00 dengan kecepatan rata-rata 30 km/jam. Sementara Dodi berangkatnya dari kota A menuju kota B pada pukul 08.30. Pada km berapa dari kota A dan pada pukul berapa Dodi dan Eka berpapasan di jalan?
   (Kunci: km 32 pukul 09.06)

BAGIAN IV
PENARIKAN AKAR DAN TIGAAN PYTHAGORAS

A. Penarikan Akar Pangkat Dua (akar kuadrat)

Teknik algoritma penarikan akar kuadrat pertama kali ditemukan oleh matematikawan India bernama Calandra (tahun 1491). Sedangkan teknik menguadratkan secara cepat digunakan rumus: $a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$

Contoh: $92^2 = \dots$ $\qquad\qquad$ $125^2 = \dots$

Jawab

$$84 \quad 92 \quad 100 \qquad\qquad 100 \quad 125 \quad 150$$

$$8 \quad 8 \qquad\qquad 25 \quad 25$$

$$\begin{aligned} 92^2 &= 84 \times 100 + 8^2 \\ &= 8400 + 64 \\ &= 8464 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 125^2 &= 100 \times 150 + 25^2 \\ &= 15000 + 625 \\ &= 15625 \end{aligned}$$

Dengan metode Calandra $\sqrt{1.56.25}$ dapat dicari sebagai berikut:

$$\sqrt{1.56.25}$$

$$\boxed{1} \times \boxed{1} \qquad = 1 \quad -$$

$$0.56$$

$$+$$

$$2\,\boxed{2} \times \boxed{2} \qquad = 44 \quad -$$

$$12\;25$$

$$+$$

$$24\,\boxed{5} \times \boxed{5} \qquad = 12\;25 \quad -$$

$$0$$

Sehingga

$$\sqrt{1.56.25} = \boxed{}\;\boxed{}\;\boxed{}$$

$$= 1\;\;2\;\;5.$$

B. Penarikan Akar Pangkat Tiga

Algoritma (teknik menghitung bilangan) untuk penarikan akar pangkat tiga yang berlaku untuk setiap bilangan seperti halnya akar kuadrat hingga saat ini belum pernah ditemukan. Namun sekedar teknik menarik akar pangkat tiga dari bilangan bulat yang hasilnya juga bilangan bulat sudah dikenal di lingkungan guru dan mungkin belum semua guru mengenalnya. Khusus untuk mencari akar pangkat tiga dari suatu bilangan yang terdiri dari *empat angka* hingga *enam angka* yang hasilnya berupa bilangan bulat dalam dua angka teknik yang dimaksud adalah sebagai berikut:

(1) Pandanglah nilai ribuannya, kemudian selidikilah bilangan kubik yang terletak tepat di bawah bilangan ribuannya itu. Selanjutnya akar pangkat tiga bilangan kubik yang dimaksud menyatakan nilai puluhannya.

(2) Pandanglah bilangan terakhirnya. Maka akar pangkat tiga dari bilangan kubik dasar yang akhirnya (nilai satuannya) sama dengan

Namun sebelum menentukan nilai akar pangkat tiga suatu bilangan kubik (bilangan pangkat tiga), berikut diberikan bilangan kubik dasar yaitu bilangan kubik yang berasal dari 9 buah bilangan asli yang pertama. Bilangan yang dimaksud adalah:

$$\left.\begin{array}{lcl}
1^3 = 1 & \longrightarrow & \sqrt[3]{1} = 1 \\
2^3 = 8 & \longrightarrow & \sqrt[3]{8} = 2 \\
3^3 = 27 & \longrightarrow & \sqrt[3]{27} = 3 \\
4^3 = 64 & \longrightarrow & \sqrt[3]{64} = 4 \\
5^3 = 125 & \longrightarrow & \sqrt[3]{125} = 5 \\
6^3 = 216 & \longrightarrow & \sqrt[3]{216} = 6 \\
7^3 = 343 & \longrightarrow & \sqrt[3]{343} = 7 \\
8^3 = 512 & \longrightarrow & \sqrt[3]{512} = 8 \\
9^3 = 729 & \longrightarrow & \sqrt[3]{729} = 9 \\
10^3 = 1000 & \longrightarrow & \sqrt[3]{1000} = 10
\end{array}\right\}$$

Digunakan untuk menentukan rusuk kubus bila diketahui volumenya. Bentuk kubik semacam ini diminta dihafal siswa. Sebab merupakan fakta dasar.

Contoh:

Hitunglah (a) $\sqrt[3]{9261} = ...$

(b) $\sqrt[3]{493.039} = ...$

Jawab:

(a) $\sqrt[3]{9261} = ...$

Ribuannya = 9 $\rightarrow$ bilangan kubik tepat di bawah 9 adalah 8.

Sehingga $\sqrt[3]{8} = \boxed{2}$…… menyatakan nilai satuannya.

Bilangan terakhir = 1 $\rightarrow$ bilangan kubik dasar yang akhirannya 1 adalah 1 sendiri.

Sehingga $\sqrt[3]{1} = \boxed{1}$…… menyatakan nilai satuannya.

Dengan demikian $\sqrt[3]{9261} = 21$

(b) $\sqrt[3]{493.039} = ...$

Ribuannya = 493 $\rightarrow$ bilangan kubik tepat di bawah 493 adalah 343.

Maka $\sqrt[3]{343} = \boxed{7}$…… menyatakan nilai satuannya.

Bilangan terakhir = 9 $\rightarrow$ bilangan kubik dasar yang akhirannya 9 adalah 729.

Maka $\sqrt[3]{729} = \boxed{9}$…… menyatakan nilai satuannya.

Dengan demikian $\sqrt[3]{493.039} = 79$

C. Tigaan Pythagoras

Tigaan Pythagoras merupakan pengetahuan bagi guru untuk membuat soal tentang panjang salah satu sisi segitiga siku-siku jika dua sisi yang lainnya diketahui. Sekali lagi pengetahuan tersebut *hanya untuk guru, bukan untuk siswa.*

Apabila (i) $x > y$ keduanya bilangan asli

(ii) x genap y ganjil dan sebaliknya

(iii) FPB antara x dan y adalah 1, yaitu FPB (x, y) = 1

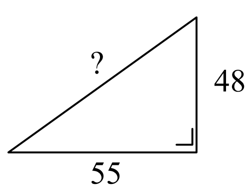
Sedangkan $a = x^2 - y^2$; $b = 2xy$; $c = x^2 + y^2$

Maka a, b, c merupakan panjang sisi segitiga siku-siku dengan hubungan berbentuk: $a^2 + b^2 = c^2$ yang kemudian disebut tigaan Pythagoras. Untuk selanjutnya kelipatannyapun juga merupakan tigaan Pythagoras, yaitu dipenuhi $(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2$.

Berikut adalah 15 macam tigaan Pythagoras yang pertama.

x	y	a	b	c
		$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	**55**	**48**	**73**
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Contoh penggunaan



Panjang sisi miring

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{55^2 + 48^2} \\ &= \sqrt{3025^2 + 2304^2} \\ &= \sqrt{5329} \\ &= 73 \end{aligned}$$

Latihan 6

1. Gambarkan kerangka berfikir Anda untuk menghitung kuadrat dari

a. 35	c. 54	e. 85	g. 207	i. 475
b. 48	d. 65	f. 192	h. 225	j. 975

Tentukan kemudian masing-masing hasil penguadratan itu.

2. Tanpa menggunakan kalkulator hitunglah akar pangkat tiga dari masing-masing bilangan kubik berikut.

a. 2197	e. 50653	i. 205.379
b. 2744	f. 59.319	j. 636.056
c. 4913	g. 79.507	k. 778.688
d. 9261	h. 97.376	i. 941.192

3. Lengkapilah tabel tigaan Pythagoras berikut

X	Y	A	B	C
		$x^2 - y^2$	2xy	$x^2 + y^2$
9	2	…	…	…
9	…	…	…	…
9	…	…	…	…
10	1	…	…	…
10	…	…	…	…
10	…	…	…	…
10	…	…	…	…

Kunci:

1. a. 1225	c. 2916	g. 42.849	1. 225.625
2. a. 13	e. 37	i. 59	

3.

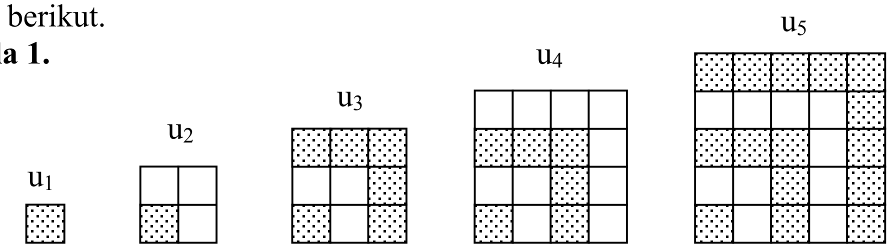
a	b	c
77	36	85
65	72	97
17	144	145
99	20	101
91	60	109
51	140	149
19	180	181

BAGIAN VI
POLA BARISAN BILANGAN

A. Bentuk-bentuk Pola Bilangan

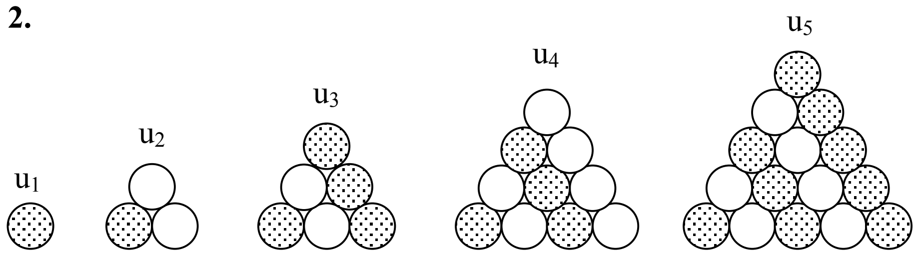
Pada bagian ini akan diperkenalkan beberapa bentuk pola dan barisan bilangan yang disajikan dalam bentuk gambar dan dalam bentuk pola bilangan yang sajiannya dinyatakan dalam lambang-lambang dan angka-angka. Perhatikan pola-pola berikut.

Pola 1.



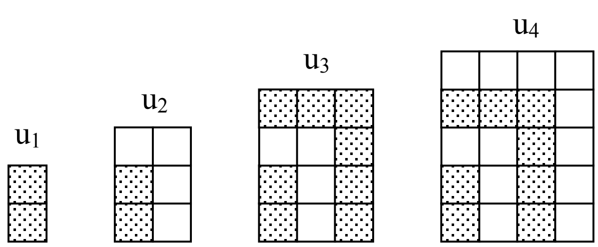
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	4	9	16	25
1	1 + 3	1 + 3 + 5	1 + 3 + 5 + 7	1 + 3 + 5 + 7 + 9

Pola 2.



u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	3	6	10	15
1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4	1 + 2 + 3 + 4 + 5

Pola 3.



u_1	u_2	u_3	u_4
2	6	12	20
2	2 + 4	2 + 4 + 6	2 + 4 + 6 + 8

Dari pola-pola yang dicontohkan tersebut di atas, tampak adanya pola ditinjau menurut bentuknya, pola ditinjau menurut dari banyaknya obyek yang diarsir dan tidak diarsir.

B. Menentukan Rumus Umum Suku dan Jumlah Suku

Untuk menentukan rumus umum suku ke n atau jumlah hingga n suku yang pertama dapat disimak pada uraian berikut ini.

Pola 1.

a) Ditinjau menurut bentuk geometrinya → pola persegi (bujur sangkar)
b) Ditinjau menurut banyaknya komponen-komponen pembentuknya (banyaknya persegi pembentuk bangun iu) → pola bilangan kuadrat
c) Ditinjau menurut pola komponen yang diarsir dan tidak diarsir polanya adalah $1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Dari ketiga sudut pandang itu selanjutnya diperoleh definisi bahwa **barisan bilangan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$** dengan

$u_1 = 1 \quad = 1^2$
$u_2 = 4 \quad = 2^2$
$u_3 = 9 \quad = 3^2$
$u_4 = 16 \quad = 4^2$
$u_5 = 25 \quad = 5^2$

disebut **barisan bilangan bujur sangkar atau barisan bilangan persegi** dengan rumus suku ke n → $u_n = n^2$. Sementara **$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots, s_n$** dengan

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 3$
$s_3 = 1 + 3 + 5$
$s_4 = 1 + 3 + 5 + 7$
$s_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
$\vdots$
$s_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$

disebut **jumlah n suku bilangan ganjil yang pertama.**

Perhatikan bahwa peragaan gambar pada pola 1 tersebut sekaligus menunjukkan (memperagakan) bahwa

> Jumlah n suku bilangan ganjil yang pertama sama dengan suku ke n barisan bilangan kuadrat yaitu $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)}_{\text{n suku}} = n^2$

Pola 2.

a) Ditinjau menurut bentuk geometrinya → pola segitiga
b) Ditinjau menurut banyaknya komponen-komponen pembentuknya (banyaknya lingkaran-lingkaran pembentuknya) → pola bilangan segitiga
c) Ditinjau menurut pola komponen yang diarsir dan tidak diarsir pola adalah. $1, 1 + 2, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \ldots$

Dari ketiga sudut pandang itu selanjutnya diperoleh definisi bahwa **barisan bilangan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$** dengan

$u_1 = 1$
$u_2 = 3$
$u_3 = 6$
$u_4 = 10$
$u_5 = 15$
$\vdots$

disebut **barisan bilangan segitiga** sedangkan $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots, s_n$ dengan

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 2$
$s_3 = 1 + 2 + 3$
$s_4 = 1 + 2 + 3 + 4$
$s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
$\vdots$
$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

disebut **jumlah n suku bilangan asli yang pertama**.

Perhatikan bahwa peragaan gambar pada pola 2 tersebut sekaligus menunjukkan (memperagakan) bahwa

> Jumlah n suku bilangan asli yang pertama sama dengan suku ke n dari barisan bilangan segitiga, dan dapat dibuktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Untuk membuktikannya dapat dilakukan dengan beberapa cara. Beberapa cara di antaranya adalah:

Cara 1.

Dengan membalik suku-sukunya. Perhatikan bahwa:

Bentuk (1) dapat ditulis secara urut maupun terbalik dalam bentuk sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\text{urut} \rightarrow \quad s_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n \\
\text{terbalik} \rightarrow \quad s_n &= n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1 \\
2s_n &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{\text{sebanyak n suku}}
\end{aligned}$$

$2s_n = n(n + 1)$ atau $s_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ atau

$$\boxed{s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Cara 2.

Dengan menyelidiki banyaknya tingkat penyelidikan hingga diperoleh selisih tetap.

Perhatikan bahwa:

Jumlah sampai dengan 1 suku = $s_1 = 1$
2 suku = $s_2 = 1 + 2 = 3$
3 suku = $s_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
4 suku = $s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
5 suku = $s_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

(i) $\boxed{1}$, 3 , 6 , 10 , 15

(ii) 2 , 3 , 4 , 5

(iii) 1 , 1 , 1

Tampak bahwa selisih tetapnya diperoleh hingga 2 tingkat penyelidikan. Itu artinya 1, 3, 6, 10, 15, … dan seterusnya adalah barisan bilangan berderajat dua, sehingga pemisalannya adalah fungsi berderajat 2 dari n yakni $s_n = an^2 + bn + c$.

Dari $s_n = an^2 + bn + c$ akan diperoleh

$$s_1 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$$
$$s_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$$
$$s_3 = a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$$
$$s_4 = a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b + c$$
$$s_5 = a(5)^2 + b(5) + c = 25a + 5b + c$$

(i) $\boxed{a + b + c}$, $4a + 2b + c$, $9a + 3b + c$, $16a + 4b + c$, $25a + 5b + c$

(ii) $3a + b$ $\quad$ $5a + b$ $\quad$ $7a + b$ $\quad$ $9a + b$

(iii) $2a$ $\quad$ $2a$ $\quad$ $2a$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang ditandai dengan tanda petak ″ $\boxed{\quad}$ ″ urut dari bawah ke atas akan diperoleh nilai tertentu untuk a, b, dan c sehingga rumus umum untuk s_n dapat ditentukan

Dari (iii) $2a = 1$

$$a = \frac{1}{2} \rightarrow \text{(ii)} \quad 3a + b = 2$$
$$3\left(\frac{1}{2}\right) + b = 2$$
$$1\frac{1}{2} + b = 2$$
$$b = \frac{1}{2} \rightarrow \text{(i)} \; a + b + c = 1$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 1$$
$$c = 0$$

$a = \dfrac{1}{2}$

$b = \dfrac{1}{2} \Rightarrow s_n = an^2 + bn + c$

$c = 0 \qquad\qquad = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n + 0$

$\qquad\qquad\quad = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n = \dfrac{1}{2}(n^2 + n) = \dfrac{1}{2}n(n+1).$ Terbukti.

Pola 3.

a) Ditinjau menurut bentuk geometrinya $\rightarrow$ pola persegipanjang

b) Ditinjau menurut banyaknya komponen-komponen pembentuknya (banyaknya petak persegi pembentuk bangun itu) $\rightarrow$ pola bilangan persegipanjang (panjang $\times$ lebar $\rightarrow 1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \ldots$) atau 2, 6, 12, 20, …

c) Ditinjau menurut pola komponen yang diarsir dan tidak diarsir pola adalah

$$2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6 + 8, \ldots$$

Dari ketiga sudut pandang itu selanjutnya diperoleh definisi bahwa **barisan bilangan $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$**

$u_1 = 1 \times 2 = 2$

$u_2 = 2 \times 3 = 6$

$u_3 = 3 \times 4 = 12$

$u_4 = 4 \times 5 = 20$

$u_5 = 5 \times 6 = 30$

$\vdots$

$u_n = n \times (n + 1)$

disebut **barisan bilangan persegipanjang** dengan rumus suku ke n adalah $u_n = n(n + 1)$. Sementara **$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots$**

$s_1 = 2$ .... $= 2$

$s_2 = 2 + 4$ .... $= 6$

$s_3 = 2 + 4 + 6$ .... $= 12$

$s_4 = 2 + 4 + 6 + 8$ .... $= 20$

$s_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10$...… $= 30$

$\vdots$

$s_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \ldots = n \times (n + 1)$

disebut **jumlah n suku bilangan genap yang pertama**.

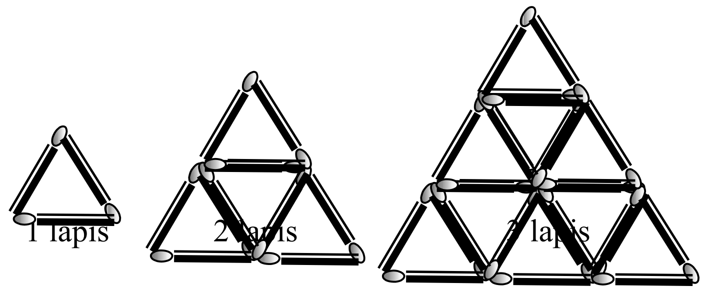
Perhatikan bahwa peragaan gambar pada pola 3 tersebut sekaligus menunjukkan (memperagakan) bahwa

Jumlah n suku bilangan genap yang pertama sama dengan suku ke n barisan

bilangan persegipanjang yaitu $\underbrace{2+4+6+8+\dots+2n}_{\text{n suku}} = n \times (n+1)$

Latihan

1. Jika untuk membuat pola segitiga-segitiga berikut diperlukan batang korek api. Berapa batang korek api yang diperlukan untuk membentuk pola segitiga hingga 10 lapis, 20 lapis, dan 100 lapis.



Petunjuk

a. Carilah rumus umumnya dengan menyelidiki selisih tetapnya dicapai pada berapa tingkat penyelidikan.
Berilah pemisalan $u_n = an + b$ .... jika u_n berderajat 1
$u_n = an^2 + bn + c$ .... jika u_n berderajat 2
$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ .... jika u_n berderajat 3
$u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$.... jika u_n berderajat 4

b. Setelah suku umumnya diketahui, barulah dimasukkan nilainya untuk n = 10, n = 20, dan n = 100. (kunci $u_{10} = 165$, $u_{20} = 630$, $u_{100} = 1510$)

2. Tunjukkan bahwa

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. Hitunglah

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$ hingga 30 suku

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots$ hingga 20 suku

c) $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots$ hingga 10 suku

(kunci: a. 9455, b. 44.100, c. 440)

DAFTAR PUSTAKA

Burton, David M. (1980). **Elementary Number Theory.** Boston: Allyn and Bacon, Inc.

Depdikbud. (1998). **GBPP Matematika SD Kurikulum 1994.** Jakarta: Depdikbud.

Estiningsih, Elly. (1994). **KBM Matematika di Sekolah Dasar (Makalah Penataran).** Yogyakarta: PPPG Matematika.

Edi Prayitno. (1997). **KPK dan FPB (Paket Pembinaan Penataran).** Yogyakarta: PPPG Matematika.

Hobby, David. (1997). **Transformational Geometry.** New Paltz, New York: University Press.

Niven, Ivan–Zuckerman, Hurbert S. (1978). **An Intoduction to the Theory of Numbers (Third Edition).** New York: John Wiley & Sons, Inc.

Sukardjono. (1996). **Berhitung Cepat di SD (Paket Pembinaan Penataran).** Yogyakarta: PPPG Matematika.

Sukayati. (1997). **Keterbagian Suatu Bilangan Oleh Bilangan Yang Kurang Dari 10 (Paket Pembinaan Penataran).** Yogyakarta: PPPG Matematika.

Supinah. (1995). **Bilangan Asli, Cacah, dan Bulat (Makalah Penataran).** Yogyakarta: PPPG Matematika.

Wirasto. (1993). **Matematika Untuk Orang Tua Murid Dan Guru (Jilid I).** Jakarta: PT. Indira.