ARITMETIKA

DISAJIKAN PADA
DIKLAT INSTRUKTUR/PENGEMBANG MATEMATIKA SMP
JENJANG DASAR
TANGGAL 10 S.D. 24 OKTOBER 2004
DI PPPG MATEMATIKA

Oleh:

Tim PPPG Matematika

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

BAGIAN I

PERBANDINGAN SENILAI DAN PERBANDINGAN BERBALIK NILAI

A. Pengertian

Membandingkan dua obyek dapat diartikan dua hal. Pertama, membandingkan dapat diartikan sebagai mencari selisih ukurannya. Kedua, membandingkan dapat diartikan sebagai mencari nilai perbandingan antara ukuran dari kedua obyek itu. Sebagai contoh, tinggi Amir 160 cm sedang tinggi Budi 170 cm. Jika cara membandingkan yang dimaksud adalah siapa yang lebih tinggi maka jawabannya adalah Budi dengan selisih tinggi = 170 cm – 160 cm = 10 cm. Namun jika yang ditanyakan adalah perbandingan yang berorientasi pada mencari hasil bagi maka :

160 cm : 170 cm = 160 : 170 = 16 : 17 = $\frac{16}{17}$.

B. Perbandingan Senilai

Apabila terdapat korespondensi satu-satu antara 2 kelompok data dengan sifat nilai perbandingan dua elemen di kelompok kiri sama dengan nilai perbandingan 2 elemen bersesuaian yang ada di kelompok kanan maka kedua kelompok data itu disebut berbanding senilai. Ciri dari perbandingan senilai adalah jika nilai atau banyak obyek di kelompok kiri semakin bertambah akan berakibat nilai atau obyek yang bersesuaian di kelompok kanan juga akan semakin bertambah, di samping itu perbandingan dua elemen di kelompok kiri dan kanan sama.

Contoh:

Baris ke -	Banyak Pensil		Harga pensil dalam rupiah
1		$\longleftrightarrow$	400
2		$\longleftrightarrow$	800
3		$\longleftrightarrow$	1200
4		$\longleftrightarrow$	1600
5		$\longleftrightarrow$	2000
6	x	$\longleftrightarrow$	y

Dari data tersebut akan diperlihatkan perbandingan senilai seperti berikut :

$$\frac{\text{Banyak pensil baris ke}-2}{\text{Banyak pensil baris ke}-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{Harga pensil baris ke}-2}{\text{Harga pensil baris ke}-4} = \frac{800}{1600} = \frac{1}{2}$$

Tampak bahwa nilai perbandingan banyak pensil pada baris ke–2 dan ke–4 = nilai perbandingan harga pensil pada dua baris yang bersesuaian. Contoh lain adalah :

$$\frac{\text{Banyak pensil baris ke}-1}{\text{Banyak pensil baris ke}-3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{Harga pensil baris ke}-1}{\text{Harga pensil baris ke}-3} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}$$

Ternyata nilai perbandingan banyak pensil pada baris ke-1 dan ke -3 = nilai perbandingan harga pensil pada dua baris yang bersesuaian. Demikianlah seterusnya bila diselidiki lebih lanjut akan selalu bersifat seperti itu. Perbandingan dengan ciri seperti itu kemudian disebut sebagai perbandingan senilai.

C. Perbandingan Berbalik Nilai

Apabila terdapat korespondensi satu-satu antara 2 kelompok data dengan sifat nilai perbandingan 2 elemen yang bersesuaian di kelompok kedua berbalik nilainya dengan nilai perbandingan di kelompok pertama maka perbandingan antara kelompok pertama dengan kelompok kedua disebut perbandingan berbalik nilai. Contoh berikut akan memberikan gambaran yang lebih jelas yakni tentang tabel banyak ternak dan banyak hari yang diperlukan untuk menghabiskan persediaan makanan yang jumlahnya tertentu :

Baris ke -	Banyak ternak (ekor)		Banyak hari untuk menghabiskan makanan
1	6	$\longleftrightarrow$	40
2	8	$\longleftrightarrow$	30
3	10	$\longleftrightarrow$	24

4	12 $\longleftrightarrow$	20
5	20 $\longleftrightarrow$	12
6	x $\longleftrightarrow$	y

$$\frac{\text{Banyak ternak baris ke}-1}{\text{Banyak ternak baris ke}-3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\text{Banyak hari baris ke}-1}{\text{Banyak hari baris ke}-3} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

Ternyata nilai perbandingan $\frac{3}{5}$ merupakan kebalikan dari $\frac{5}{3}$.

Contoh lainnya :

$$\frac{\text{Banyak ternak baris ke}-2}{\text{Banyak ternak baris ke}-5} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\text{Banyak hari baris ke}-2}{\text{Banyak hari baris ke}-5} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

Ternyata perbandingan $\frac{2}{5}$ merupakan kebalikan dari $\frac{5}{2}$.

Kesimpulan :

Perbandingan antara banyak ternak pada dua baris tertentu dan perbandingan banyak hari untuk menghabiskan sejumlah makanan tertentu pada dua baris yang bersesuaianakan saling berkebalikan nilainya. Sehingga perbandingan banyak ternak terhadap banyak hari merupakan perbandingan berbalik nilai.

Contoh-contoh perhitungan :

1. Untuk mengeringkan kaos oblong sebanyak 10 buah diperlukan waktu penjemuran di terik matahari selama 3 jam. Berapakah waktu penjemuran yang diperlukan untuk mengeringkan kaos oblong sebanyak 40 buah ?

   Jawab :

   Secara nalar makin banyak kaos oblong yang dijemur tidak berakibat makin lama atau makin cepat waktu penjemurannya hingga kering. Maka antara banyak kaos dan waktu penjemuran <u>bukan merupakan perbandingan senilai</u> dan juga <u>bukan perbandingan berbalik nilai.</u> Dengan demikian waktu penjemurannya tetap 3 jam untuk berapapun jumlah kaos oblong yang dijemur.

2. Dengan kecepatan tetap, untuk jarak 60 km sebuah mobil memerlukan bensin 5 liter. Berapa liter bensin yang diperlukan untuk menenpuh jarak 150 km ?

   Jawab :

   Kenyataan secara nalar, semakin jauh jarak yang ditempuh suatu kendaraan bermotor akan berakibat semakin banyak bahan bakar yang diperlukan, dan semakin dekat jarak yang ditempuh akan berakibat semakin sedikit bahan bakar yang dibutuhkan. Dengan demikian antara jarak tempuh dan bahan bakar merupakan perbandingan senilai, sehingga kerangka berpikir untuk menyelesaikan soal di atas adalah sebagai berikut :

Jarak tempuh		Bensin yang dibutuhkan
60 km	$\longleftrightarrow$	5 liter
150 km	$\longleftrightarrow$	x liter

   Karena perbandingannya senilai maka :

   $\frac{60}{150} = \frac{5}{x}$ atau 60 x = 5 (150)

   $$x = \frac{5(150)}{60} = \frac{750}{60} = 12,5$$

   sehingga untuk menempuh jarak 150 km diperlukan bensin 12,5 liter.

3. Dengan kecepatan mobil rata-rata 72 km/jam jarak antara dua kota dapat ditempuh selama 5 jam. Berapa kecepatan mobil itu jika mereka menginginkan lebih santai dengan lama perjalanan 8 jam ?

   Jawab :

   Karena untuk menepuh jarak yang samajika kecepatan ditambah berakibat waktu tempuh berkurang, maka pebandingan antara kecepatan dan waktu tempuh merupakan perbandingan berbalik nilai. Dengan demikian kerangka penyelesaiannya adalah sebagai berikut :

Kecepatan (km/jam) Waktu tempuh (jam)

$$72 \longleftrightarrow 5$$

$$x \longleftrightarrow 8$$

Perbandingannya berbalik nilai, sehingga :

$\frac{72}{x} = \frac{8}{5}$ atau 8x = 72 (5)

$$x = \frac{72(5)}{8} = 9\ (5) = 45\ .$$

Jadi kecepatan rata-ratanya 45 km/ jam.

4. Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh:

   3 orang profesional akan selesai dalam 20 hari

   5 orang non profesional seleai dalam 40 hari.

   Sekarang jika pekerjaan itu diselesaikan oleh:

   2 orang profesional dan 2 orang non profesional, pekerjaan itu akan selesai dalam berapa hari ?

   Jawab :

   Karena 3 orang profesional mengerjakan pekerjaan dalam 20 hari, maka :

   3 orang profesional dalam 1 hari ,menyelesaikan $\frac{1}{20}$ pekerjaan. Sehingga

   1 orang profesional dalam 1 hari menyelesaikan $\frac{1}{20}$ pekerjaan / 3 = $\frac{1}{20x3}$ pekerjaan

   Dengan cara yang sama ;

   1 orang non profesional dalam 1 hari menyelesaikan $\frac{1}{40x5}$ pekerjaan.

   Sekarang jika yang mengerjakan 2 orang profesional dan 2 orang non profesional , penalarannya :

   1 orang profesional dalam 1 hari menyelesaikan $\frac{1}{20x3}$ pekerjaan

   2 orang profesional dalam 1 hari menyelesaikan 2 x $\frac{1}{20x3}$ pekerjaan.

1 orang non profesional dalam 1 hari menyelesaikan $\dfrac{1}{40x5}$ pekerjaan

2 orang non profesional dalam 1 hari menyelesaikan 2 x $\dfrac{1}{40x5}$ pekerjaan

$+$

~~Jadi 2 orang profesional dan 2 orang non profesional 1 hari menyelesaikan~~

$$\left[\frac{2}{20x3}+\frac{2}{40x5}\right]\text{pekerjaan} = \frac{2}{20x3} + \frac{1}{20x5}\ \text{pekerjaan}$$

$$= \frac{2x5+1x3}{20x35} = \frac{13}{20x35}\ \text{pekerjaan}$$

Karena :

1 hari menyelesaikan $\dfrac{13}{20x35}$ pekerjaan, maka 1 pekerjaan diselesaikan dalam $\dfrac{20x3x5}{13}$ hari = 23,077 $\approx$ 24 hari.

LATIHAN 1

1. Katakan mana diantara pernyataan-pernyataan di bawah ini yang merupakan perbandingan senilai dan mana yang merupakan perbandingan berbalik nilai serta mana yang bukan keduanya.
   a. banyaknya tenaga kerja dan waktu untuk menyelesaikan pekerjaan.
   b. banyaknya tenaga kerja dan upah yang harus diberikan
   c. banyaknya baju yang dijemur di bawah sinar matahari dan waktu yang diperlukan untuk mengeringkan baju-baju itu.
   d. banyaknya penumpang bus dan bahan bakar solar yang diperlukan untuk menempuh jarak tertentu.
   e. Banyaknya penghuni asrama dengan banyaknya hari untuk menghabiskan 100 kg beras.
   f. besarnya ukuran cc silender sepeda motor dan harga beli sepeda motor tersebut.

2. Sebuah panti asuhan mempunyai persediaan beras cukup untuk 20 anak selama 25 hari. Berapa hari beras itu akan habis jika panti asuhan itu dihuni 25 anak.
3. Tarif telepon untuk pemakaian 150 pulsa sebesar Rp 18.000,00.
   Tentukan tarif untuk pemakaian 200 pulsa.
4. Suatu pekerjaan dapat diselesaikan oleh 20 orang dalam 10 hari. Berapa lama pekerjaan itu selesai jika dikerjakan oleh 50 orang.
5. Sebuah proyek oleh pemborong A dapat diselesaikan dalam waktu 8 bulan dan jika dikerjakan oleh pemborong B dapat diselesaikan dalam waktu 12 bulan. Berapa bulan waktu yang dibutuhkan pemborong A dan B jika proyek itu dikerjakan bersama-sama ?
6. Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh tenaga profesional sebanyak 6 orang selesai dalam 36 hari, sedangkan jika non profesional sebanyak 5 orang selesai selama 75 hari. Jika pekerjaan itu dikerjakan oleh 2 orang profesional dan 3 orang non profesioanl, dalam berapa hari pekerjaan itu akan selesai ?
   (Kunci : 57,9399 hari $\approx$ 58 hari)
7. Seorang pemilik kebun mempunyai sebuah traktor, 15 orang pekerja dan 2 alat bajak tradisional. Jika kebun itu diolah dengan sebuah traktor selesai dalam 10 hari. Jika dengan sebuah bajak tradisional selesai dalam 20 hari dan jika dicangkul oleh seorang pekerja selesai dalam 80 hari. Jika seluruh tenaga dan alat yang dimiliki pemilik kebun tersebut dikerahkan, pekerjaan akan selesai dalam berapa hari ?

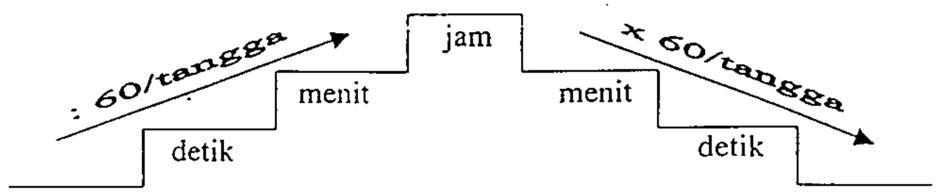
(Kunci : $2\frac{6}{7}$ hari $\approx$ 3 hari)

BAGIAN II

JARAK, WAKTU, KECEPATAN

A. MENGHITUNG SELISIH ANTARA DUA WAKTU

Suatu hal yang perlu diketahui dan ditekankan ke siswa adalah bahwa hubungan antara jam, menit, dan detik merupakan kelipatan 60. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar di bawah ini :



1 hari = 24 jam

1 jam = 60 menit

1 menit = 60 detik

Contoh :

Tentukan selisih waktu antara pukul 19.25 dengan pukul 10.45.

Jawab :

Pukul	: 19.25	→	18.85 (1 jam + 25 menit = 85 menit)
Pukul	: 10.45	→	10.45 −
Selisih	=	→	8.40

Jadi selisih waktunya adalah 8 jam 40 menit.

Contoh 2 :

Suatu rombongan siswa SLTP mengadakan perjalanan wisata menggunakan bus. Mereka berangkat pukul 21.30 dan tiba di tempat tujuan pukul 05.40 pagi harinya. Berapakah lama mereka menempuh perjalanan ?

Jawab :

Pukul 21.30 s.d. pukul 24.00 (atau pukul 00.00)	= 2 jam 30 menit
Pukul 00.00 s.d. pukul 05.40	= 5 jam 40 menit
Lama perjalanan	= 7 jam 70 menit
	= 8 jam 10 menit

B. HUBUNGAN JARAK, WAKTU, DAN KECEPATAN.

Jarak, waktu dan kecepatan merupakan ukuran (dimensi) yang berkenaan dengan perjalanan. Jika dalam suatu perjalanan, kecepatan kendaraan yang kita tumpangi tidak diberikan keterangan apa-apa, maka kecepatan kendarannya dianggap tetap, yang karena jarak yang ditempuh sebanding dengan waktu tempuh. maka kecepatan tetap ini untuk selanjutnya dikenal dengan sebutan kecepatan rata-rata.

Jika jarak dari tempat pemberangkatan adalah d (distance/jarak), kecepatan rata-ratanya v (velocity/kecepatan) dan waktu tempuh ke tujuan t (time/waktu). Maka hubungan antara d, v dan t dirumuskan seperti berikut.

$$\boxed{d = v \times t} \quad \text{atau} \quad \boxed{v = \frac{d}{t}}$$

d = jarak, v = kecepatan, t = waktu

Apabila jarak d dinyatakan dalam kilometer dan waktu t dalam jam maka kecepatan v dinyatakan dalam satuan km/jam. Jika jarak d dinyatakan dalam meter sedangkan waktu t dalam detik, maka kecepatan v dinyatakan dalam m/detik.

Contoh 1 :

Jarak Jakarta – Bandung 200 km, ditempuh dengan mobil selama 4 jam. Tentukan kecepatan rata-rata mobil itu. Gambarkan kemudian grafik hubungan antara jarak d dengan waktu t, dan kecepatan v dengan waktu t.

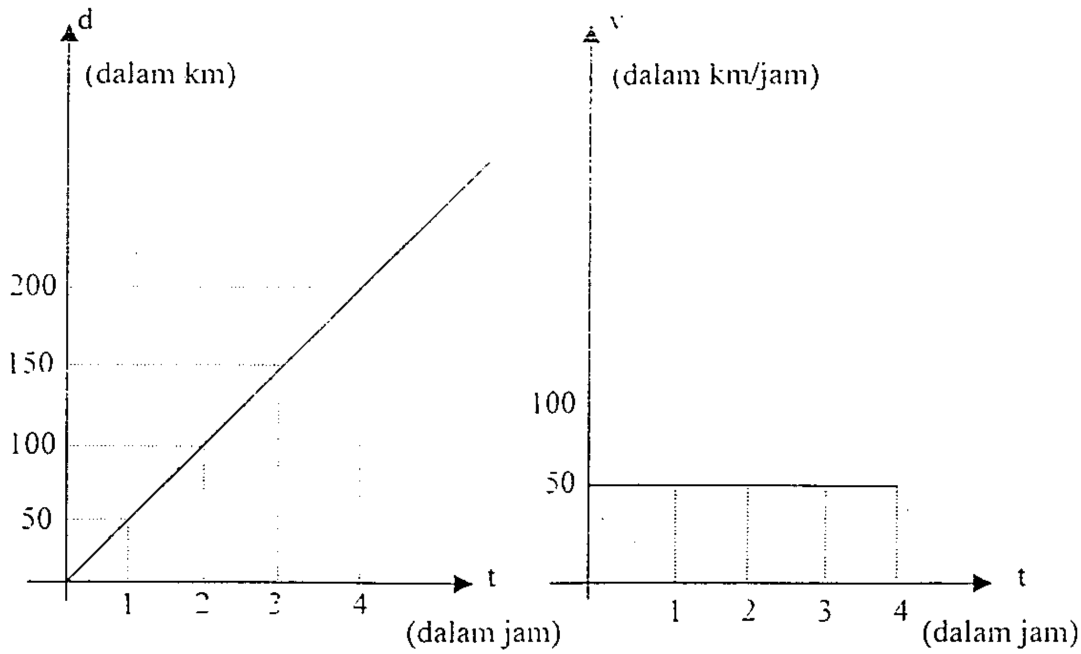
Jawab :

a) Jarak Jakarta – Bandung → $d = 200$

waktu tempuh kendaraan (mobil) → $t = 4$

Kecepatan rata-ratanya : $v = \frac{d}{t} = \frac{200}{4} = 50$ km/jam

b) Grafik



Dari grafik yang ditampilkan tampak bahwa grafik jarak d terhadap waktu berupa garis lurus yang berkemiringan tertentu sedang grafik kecepatan v terhadap waktu berapa garis mendatar (mengapa ?).

Suatu hal yang umum terjadi adalah bahwa perjalanan bus biasanya tidak secara terus menerus melainkan mengalami berhenti di beberapa tempat. Apabila terjadi demikian maka grafiknya akan berupa ruas-ruas garis yang bersambung dan secara keseluruhan tidak terletak pada suatu garis lurus.

Contoh 2 :

Seorang penggemar bersepeda menempuh suatu perjalanan sejauh 100 km dalam waktu 5 jam. Namun di perjalanan ia kadang kala berhenti. Perinciannya adalah sebagai berikut.

Tahap I bersepeda selama 1 jam menempuh jarak 30 km

Tahap II ia berhenti diperjalanan selama $\frac{1}{2}$ jam

Tahap III ia lanjutkan perjalanan sejauh 20 km selama $1\frac{1}{2}$ jam

Tahap IV ia berhenti untuk yang kedua kalinya selama 1 jam

Tahap V ia lanjutkan perjalanan sejauh 40 km selama $\frac{1}{2}$ jam

Tahap VI ia perlambat perjalanannya sejauh 20 km sisanya selama $\frac{1}{2}$ jam.

Tentukan :

a) grafik jarak terhadap waktu dari perjalanan itu.

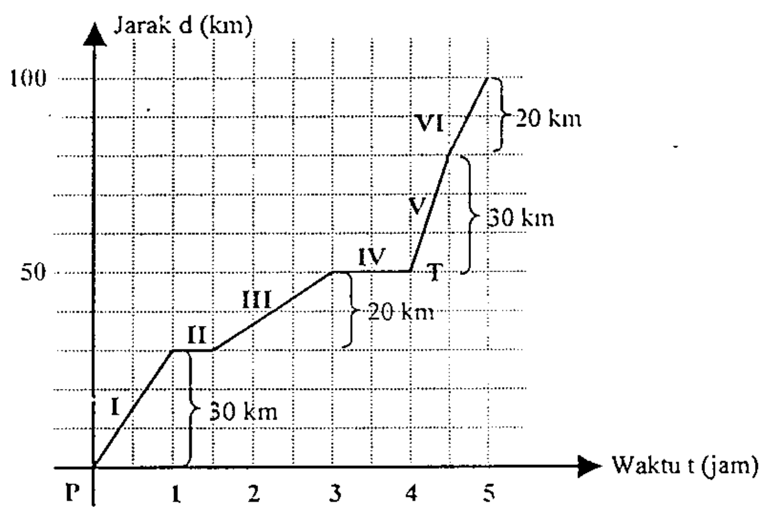
b) kecepatannya pada setiap tahap.

Jawab :

Sebagai pencerahan kepada siswa perlu dijelaskan tahap demi tahap, ditunggu interaksinya sehingga dalam PBM itu sebagian besar dari mereka dapat memahaminya dengan baik.

Selanjutnya hasil yang diharapkan adalah sebagai berikut :

a) Grafik jarak terhadap waktu



b) Karena

Tahap I : $d = 30, t = 1$ maka $v = \frac{d}{t} = \frac{30}{1} = 30$

Tahap II : istirahat, $t = \frac{1}{2}$ maka $v = \frac{d}{t} = \frac{0}{0,5} = 0$

Tahap III : $d = 20, t = 1\frac{1}{2}$ maka $v = \frac{d}{t} = \frac{20}{1.5} = 13.3$

Dengan cara yang sama diperoleh data-data sebagai berikut :

Tahap IV : $t = 1, v = 0$

Tahap V : $t = \frac{1}{2}$, $v = 60$

Tahap VI : $t = \frac{1}{2}$, $v = 40$

Tugas : Buatlah grafik kecepatan terhadap waktu dari perjalanan pada soal 2 tersebut.

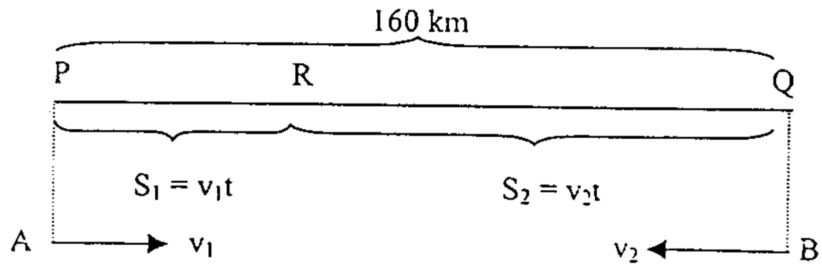
Contoh 3 :

Tentang perjalanan berlawanan arah sehingga terjadi pertemuan.

Kota P dan kota Q berjarak 160 km. Dua orang pemuda, A dan B melakukan perjalanan dari arah yang berbeda. A dari kota P menuju Q dan B pada saat yang bersamaan melakukan perjalanan dari kota Q menuju kota P. Jika A menggunakan sepeda dengan kecepatan rata-rata 20 km/jam sedang B menggunakan sepeda motor dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam, setelah melakukan perjalanan berapa jam mereka bertemu dan pada kilometer ke berapa dari kota P mereka bertemu ?

Jawab :

Karena waktu pemberangkatannya bersamaan maka waktu yang diperlukan untuk menempuh perjalanan hingga mereka bertemu di jalan adalah sama. Misalkan waktu perjalanan tersebut adalah t jam. Maka :



Untuk A : $v_1 = 20$ dan untuk B : $v_2 = 60$

$t_1 = t$ $t_2 = t$

Mudah dibayangkan bahwa

$S_1 + S_2 = 160$, sehingga :

$v_1t + v_2t = 160$

$20t + 60t = 160$

$80t = 160 \rightarrow \quad t = \frac{160}{80} = 2.$

Dengan demikian mereka akan bertemu setelah 2 jam. Jarak pertemuan yang dimaksud (dari P) adalah S_1 yaitu

$S_1 = v_1 \cdot t$

$= 20 \times 2 = 40$

$= 40$ km

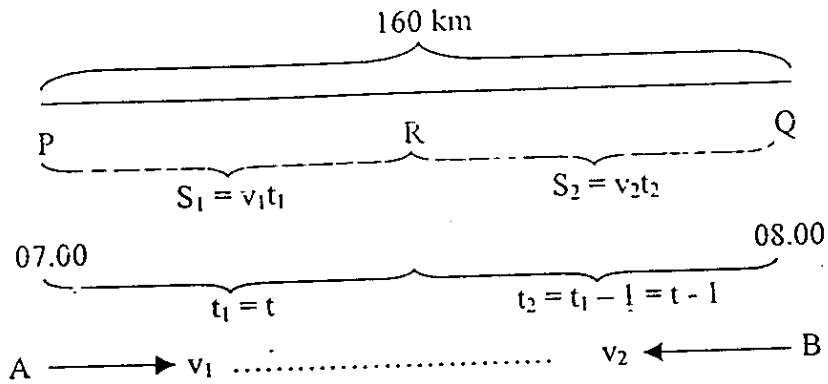
Jika dari Q maka jaraknya $= S_2$

$S_2 = v_2 \cdot t$

$= 60 \times 2 = 120$ km.

Jadi jarak pertemuan dari P adalah 40 km dan dari Q adalah 120 km.

Jika waktu pemberangkatannya berbeda misalnya A berangkat lebih awal yakni pukul 07.00 sedang B berangkat 1 jam kemudian yakni pukul 08.00. Maka gambaran penyelesaiannya menjadi seperti berikut.



$t_2 = t_1 - 1$ sebab t_1 lebih awal 1 jam dari t_2.

Selanjutnya karena diketahui :

A: $v_1 = 20$, $t_1 = t$ dan B: $v_2 = 60$, $t_2 = t - 1$

Jika kita masukkan ke persamaan berikut :

$S_1 + S_2 = PQ$ akan didapat :

$v_1t_1 + v_2t_2 = 160$

$20t + 60(t - 1) = 160$

$20t + 60t - 60 = 160$

$80t = 160 + 60$

$80t = 220 \rightarrow t = \dfrac{220}{80} = 2\dfrac{3}{4}$

Sehingga pertemuan terjadi setelah $2\frac{3}{4}$ jam atau 2 jam 45 menit.

Karena $t = 2\frac{3}{4}$ maka $t_1 = t = 2\frac{3}{4}$ dan $t_2 = t - 1 = 1\frac{3}{4}$.

Sehingga pertemuan terjadi pada pukul :

$07.00 + 2\frac{3}{4} = 09.45$ atau pada pukul $08.00 + 1\frac{3}{4} = 09.45$

Jarak pertemuan dari $P = S_1$

$$= v_1 t_1 = 20 \times 2\frac{3}{4} = 55$$

Jadi jarak pertemuan keduanya dari P adalah 55 km.

Contoh 4 :

Tentang perjalanan searah sehingga terjadi penyusulan.

Dalam menempuh suatu perjalanan searah dari suatu tempat pemberangkatan agar kendaraan yang satu memungkinkan untuk tersusul oleh kendaraan yang lain maka kendaraan yang lebih lambat kecepatannya harus diberi kesempatan berangkat lebih dahulu. Dengan demikian pasti terjadi selisih waktu pemberangkatan. Karena untuk mencapai jarak yang sama kendaraan yang lebih lambat memerlukan waktu lebih lama maka untuk mencapai keseimbangan waktu tempuh didapat kerangka berpikir :

Waktu untuk kendaraan lambat = Waktu untuk kendaraan cepat + Selisih waktu

Contoh soal :

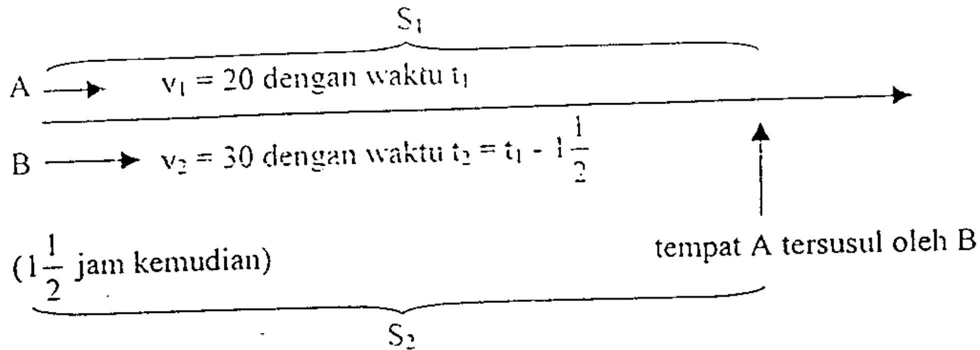
Misalkan dua orang pengendara sepeda motor A dan B akan meninggalkan suatu tempat dengan rute perjalanan yang sama. A (yang kendaraannya lebih lambat) misal dengan kecepatan rata-rata 20 km/jam diberi kesempatan lebih dahulu untuk berangkat. B (yang kendaraannya lebih cepat) misal dengan kecepatan rata-rata 30 km/jam diminta menunggu beberapa lama misal $1\frac{1}{2}$ jam kemudian. Pada kilometer berapa A akan tersusul oleh B ?

Jawab :

Kecepatan A = 20 km/jam sehingga $v_1 = 20$.

Kecepatan B = 30 km/jam sehingga $v_2 = 30$.

Misalkan setelah t detik A menyusul B, maka B telah bergerak / berjalan t_2 detik sehingga $t_2 = t_1 - 1\frac{1}{2}$. Hal itu digambarkan dengan diagram ini :



Karena saat tersusul jarak tempuhnya sama maka

$S_1 = S_2$

$v_1 t_1 = v_2 t_2$

$20t_1 = 30t_2$

$20t_1 = 30(t_1 - 1\frac{1}{2})$

$20t_1 = 30t_1 - 45$

$-10t_1 = -45 \rightarrow t_1 = \frac{-45}{-10} = 4{,}5$

Jadi A tersusul B setelah 4,5 jam

Selanjutnya untuk mencari jarak tempuh (saat yang lebih lambat tersusul oleh yang lebih cepat) dapat dilakukan dengan 2 cara yakni berdasarkan tinjauan terhadap S_1 atau tinjauan terhadap S_2, yakni :

Jarak tempuhnya = $S_1 = v_1 t_1$ atau $S_2 = v_2 t_2$ …….. (sebab $S_1 = S_2$)

$= 20(4{,}5)$ $\quad$ $= 30(4{,}5 - 1{,}5)$

$= 90$ $\quad$ $= 30(3) = 90$.

Jadi A tersusul oleh B setelah menempuh perjalanan sejauh 90 km.

Soal Latihan **2**

1. Andi berangkat dari kota A pada pukul 07.15, menuju kota B yang berjarak 245 km dengan mengendarai seped motor yang berkecapatn rata-rata 60 km/jam. Beny berangkat dari kota B menuju kota A melalui jalan yang sama pada pukul 07.15 juga. Beny mengendarai mobil yang kecepatan rata-ratanya 80 km/jam.
   a. Pada jam berapa mereka berpapasan di jalan ?
   b. Pada jarak berapa km dari kota A saat mereka berpapasan ?

   (Kunci : a. 09.00; b. 105 km)

2. Eka dan Dewi menempuh jarak yang sama namun dari arah yang berlawanan. Eka berangkat dari kota P pada pukul 09.00 menuju kota Q yang berjarak 165 km dari kota P dengan berkendaraan Vespa yang kecepatan rata-ratanya 42 km/jam. Pada jam yang sama Dewi berangkat dari kota Q menuju kota P dengan mengendarai sepeda motor Honda Tiger yang kecepatan rata-ratanya 68 km/jam. Pada km berapa dari kota Q mereka berpapasan ? Pada pukul berapakah itu ?

   (Kunci : a. 102 km; b. 10.30)

3. Adi berangkat dari kota A menuju kota B yang berjarak 159 km pada pukul 07.30 dengan mengendarai sepeda motor yang kecepatan rata-ratanya 48 km/jam. Budi berangkat dari kota B menuju kota A dengan sepeda motor yang kecepatan rata-ratanya 60 km/jam. Jika Budi berangkat setengah jam setelah keberangkatan Adi, pada jam berapakah mereka akan berpapasan di jalan ?

   (Kunci : 09.15)

4. Doni bersepeda motor dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam, berangkat dari kota P menuju kota Q yang berjarak 165 km pada pukul 11.00. Sedangkan Krisna berangkat dari kota Q menuju kota P pada pukul 10.15 dengan sepeda motor yang berkecepatan rata-rata 45 km/jam. Pada jam berapakan mereka berpapasan di tengah jalan ? Pada jarak berapa km dari kota P saat mereka berpapasan ?

   (Kunci : a. jam 12.45; b. 75 km)

5. Chandra berangkat dari kota A pada pukul 07.30 dengan kendaraan sepeda motor yang kecepatan rata-ratanya 50 km/jam. Satu jam kemudian Dedy berangkat dari tempat yang sama menuju ke tujuan yang sama pula dengan tujuan Chandra. Dedy

mengendarai sepeda motor yang kecepatan rata-ratanya 75 km/jam. Pada pukul berapakah Dedy dapat menyusul Chandra dalam perjalanan tersebut ?

(Kunci : jam 10.30)

6. Terdapat dua bus antar propinsi yang berangkat dari terminal dengan tujuan kota yang sama dan melalui jalan yang sama pula. Bus pertama berangkat pada pukul 15.00 dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Bus kedua berangkat pukul 17.30 dengan kecepatan rata-rata 75 km/jam. Pada jam berapakah bus kedua dapat menyusul perjalanan bus pertama ?

(Kunci : jam 03.00 hari berikutnya)

BAGIAN III

PERPANGKATAN DAN PENARIKAN AKAR

A. Eksponen atau Perpangkatan

Bilangan berpangkat ialah bilangan real yang dinyatakan dalam bentuk a^x. Pada bilangan seperti itu a disebut bilangan pokok dan x disebut pangkat (eksponen) dari a. Sebagai gambarannya diberikan beberapa contoh sebagai berikut:

- $5^3 = 5.5.5 = 125$
- $5^3 . 5^4 = (5.5.5).(5.5.5.5) = 5.5.5.5.5.5.5 = 5^7$
- $(5^3)^4 = (5.5.5)^4$

  $= (5.5.5).(5.5.5).(5.5.5).(5.5.5) = 5^{12}$
- $\dfrac{5^6}{5^4} = \dfrac{5.5.5.5.5.5}{5.5.5.5} = 5.5 = 5^2$
- $\dfrac{5^4}{5^6} = \dfrac{5.5.5.5}{5.5.5.5.5.5} = \dfrac{1}{5.} = 5^{-2}$
- $\dfrac{5^3}{5^3} = \dfrac{5.5.5}{5.5.5} = 5^0 = 1$
- $\sqrt[3]{6^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25$

Definisi Bilangan Berpangkat

Secara umum untuk setiap bilangan real a dan untuk setiap bilangan bulat positip m dan n berlaku ketentuan sebagai berikut :

> Definisi : (1) $a^n = \underbrace{a.a. \ldots a}_{n \text{ faktor}}$, untuk n bulat positip
>
> (2) $\sqrt[n]{a}$ ialah bilangan yang apabila dipangkatkan dengan n hasilnya adalah a. Atau
>
> $(\sqrt[n]{a}) = b \Leftrightarrow b^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

Sifat-sifat Bilangan Berpangkat

Dari definisi di atas selanjutnya secara deduktif dapat dibuktikan sifat-sifat bilangan berpangkat sebagai berikut :

Sifat-sifat :

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(3) $a^0 = 1$

(4) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

(5) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(6) $(a^m)^n = a^{m.n}$

(7) Untuk bilangan m yang prima relatif terhadap n, yaitu apabila FPB (m.n) = 1, berlaku $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Bukti 1

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a.a \ldots a}_{m \text{ faktor}}) \cdot (\underbrace{a.a \ldots a}_{n \text{ faktor}})$$

$$= \underbrace{a.a \ldots\ldots\ldots a}_{(m+n) \text{ faktor}} = a^{m+n}$$

Bukti 2

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a.a \ldots a.a.a \ldots a}^{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a.a \ldots a}_{n \text{ faktor}}} = \underbrace{a.a \ldots a}_{(m-n) \text{ faktor}} = a^{m-n}$$

Bukti 3

$$a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1 \text{ untuk } n = m$$

Bukti 4

$$a^{-1} = a^{m-m-1} = a^{m-(m+1)} = \frac{\overbrace{a.a \ldots a}^{n \text{ faktor}}}{\underbrace{a.a \ldots a.a}_{(m+1) \text{ faktor}}} = \frac{1}{a}$$

$\boxed{\text{Bukti 5}}$ $a^{-n} = (a^{-1})^n = \underbrace{(\frac{1}{a})(\frac{1}{a})\ldots(\frac{1}{a})}_{n \text{ faktor}} = \frac{1.1\ldots1}{\underbrace{a.a\ldots a}_{n \text{ faktor}}} = \frac{1}{a^n}$

$\boxed{\text{Bukti 6}}$ $(a^m)^n = (\underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{m \text{ faktor}})^n$

$= \underbrace{(a.a \ldots a).(a.a \ldots a) \ldots (a.a \ldots a)}_{mn \text{ faktor}} = a^{m.n}$

$\boxed{\text{Bukti 7}}$. Berdasarkan definisi $(\sqrt[n]{a}) = b \Leftrightarrow b^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a$

maka, bila $\sqrt[n]{a^m} = b \Leftrightarrow b^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$

Dengan demikian terbukti bahwa $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Contoh Soal :

Sederhanakan : $(5^{-5} m n^6)^{-2} \times 5^{-7} m^8 n^9$

Jawab : $= 5^{10} m^{-2} n^{-12} \times 5^{-7} m^8 n^9$

$= 5^{10+(-3)} m^{(-2+8)} n^{(-12+9)}$

$= 5^7 m^6 n^{-3}$

Persamaan Eksponen

Contoh : Selesaikan $2^{2x+1} + 2^x = 3$.

Jawab : Misalkan $2^x = y$, maka persamaan semula akan berupa

$2y^2 + y - 3 = 0$

$(2y + 1)(y - 1) = 0$

$y = -1\frac{1}{2}$

atau $y = 1$

Untuk $y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Untuk $y = -1\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = -1\frac{1}{2}$. Persamaan ini tidak mempunyai penyelesaian sebab nilai bilangan berpangkat dengan bilangan pokok 2 selalu positip. Dengan demikian penyelesaiannya hanyalah $x = 0$.

Latihan 3

1. Sederhanakan :
   a. $(5^3)^2 : 5^5 \times 5^4$
   b. $(5^{-5} m\, n^6)^{-2} : (5^{-7} m^8 n^9)$
2. Nyatakan dalam bentuk baku :
   a. $600.000 : 25$
   b. $120.000 : 60 \times 10^4$
3. Nyatakan dalam pangkat positif :
   a. $(c^{-7} m^5 n^{-9})^{-2} \times (c^{-10} m^8 n^{-9})$
   b. $(c^{-7} m^5 n^{-9})^{-2} : (c^{-10} m^8 n^{-9})^2$
   c. $(c^{-7} m^5 n^{-9})^2 : (c^{-10} m^8 n^{-9})^{-3}$
4. Hitung nilai dari :
   a. 2^{-1}
   b. $8^{1/3}$
   c. $8^{-1/3}$
   d. $64^{-2/3}$
5. Tentukan penyelesaian dari :
   a. $2^{x+1} + 2^{2x+3} = 36$
   c. $3^{x+2} - 3^{2x} = 18$
   d. $4^{1-x} + 2^{3-x} = 12$
   e. $2^{2x} - 2^{x+1} = 8$
   f. $2^{2x+1} = 2^x + 6$
   g. $(\sqrt{5})^x = 5^{x+1} - 4$

BAGIAN IV

LOGARITMA BILANGAN REAL

Pendahuluan

Amuba adalah binatang bersel satu tanpa bentuk tetap dan menyerupai lendir yang bergerak. Seekor amuba berkembang biak dengan cara membelah diri sehingga pada pagi hari pertama, dari seekor amuba tadi akan didapat 2 ekor amuba. Dari 2 ekor amuba tadi, pada pagi hari kedua akan didapat 4 ekor amuba sebagai hasil pembelahan 2 ekor amuba tadi. Keesokan harinya, di pagi hari ke-3, akan didapat 8 ekor dan hari berikutnya lagi 16 ekor amuba. Hubungan antara banyaknya amuba dan banyaknya hari dapat dinyatakan dengan tabel berikut :

Hari	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	...	n
Jml	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...	...	2^n

Terlihat jelas bahwa barisan bilangan pada baris pertama merupakan barisan bilangan cacah sedangkan barisan bilangan pada baris ke-dua tabel di atas merupakan barisan bilangan dengan rumus umum suku ke-n = 2^n untuk n bilangan cacah. Dari dua barisan pada tabel di atas, ada hal menarik yang diperhatikan Matematikawan Skotlandia bernama John Napier, yaitu jika kita pilih dua bilangan pada barisan-ke dua, misalnya dipilih bilangan 4 dan 16 lalu ke-dua bilangan tersebut dikalikan, akan didapat 4 x 16 = 64. Ternyata, 4 pada barisan ke-dua bersesuaian dengan 2 pada barisan pertama, 16 pada barisan ke-dua bersesuaian dengan 4 pada barisan pertama dan 64 (sebagai hasil 4 x 16) pada barisan ke-dua bersesuaian dengan 6 pada barisan pertama. Hasil yang didapat :

$$4 \times 16 = 64$$

$$2 + 4 = 6$$

Hal ini menunjukkan kepada John Napier dan kita bahwa jika kita ingin mencari hasil kali dua bilangan pada barisan ke dua namun kita tidak ingin mengalikan dua bilangan tersebut, maka kita dapat menjumlahkan dua bilangan yang bersesuaian pada baris pertama sehingga dari hasil penjumlahan dua bilangan pada baris pertama itu akan didapat bilangan yang bersesuaian pada baris ke-dua sebagai hasil perkalian dua bilangan tadi.

Contoh : Dengan hanya menggunakan tabel di atas, tentukan hasil dari 8 x 16.

Jawab :

8 dan 16 berturut-turut bersesuaian dengan 3 dan 4. Karena 3 + 4 = 7 dan 7 pada baris pertama bersesuaian dengan 128, maka 8 X 16 = 128.

A. Pengertian Logaritma

Apa yang dipaparkan di atas telah menunjukkan bahwa ada korespondensi satu-satu antara bilangan cacah n dengan 2^n. Sebagai misal, 3 dipetakan dengan 8. Untuk mendapatkan 8 dari 3 kita dapat menggunakan operasi perpangkatan yaitu $2^3 = 8$. Pertanyaannya sekarang adalah bagaimana cara mendapatkan 3 dari 8 ? Notasi yang digunakan adalah ${}^2\log 8 = 3$. Artinya, permasalahan tentang logaritma secara sederhana sebenarnya adalah permasalahan mencari nilai pangkat suatu bilangan bila bilangan pokok jika hasil perpangkatannya diketahui. Sebagai contoh, tentukan x jika $5^x = 125$. Untuk memecahkan permasalahan tersebut dilakukan perhitungan logaritma. Ide deduktifnya adalah sebagai berikut.

Definisi : Untuk setiap bilangan $a \neq 1$ dan $a > 0$ serta $b > 0$ berlaku
${}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b$, yaitu apabila $a^{{}^a\log b} = b$

Selanjutnya a disebut bilangan pokok, b bilangan yang ditarik logaritmanya dan c adalah hasil penarikan logaritmanya. Sebagai contoh, ${}^2\log 8 = 3$ karena $2^3 = 8$. Namun ${}^1\log 8$ tidak memiliki nilai karena tidak ada bilangan yang jika menjadi pangkat dari bilangan pokoknya (yaitu 1) yang akan menghasilkan 8. Begitu juga ${}^{-2}\log 8$ tidak ada nilainya dengan alasan yang sama. Penting dicatat bahwa untuk setiap bilangan pokok a, ${}^a\log b$ hanya didefinisikan untuk $b > 0$. Hal ini disebabkan ${}^a\log b = c$ karena $a^c = b$ dan $a^c > 0$ untuk semua nilai real dari c (karena a positif). Karenanya pada pembicaraan mengenai logaritma seperti ${}^a\log b$ disyaratkan $a \neq 1$, $a > 0$ serta $b > 0$.

Sifat-sifat Logaritma :

Dari definisi di atas selanjutnya secara deduktif dapat diturunkan sifat-sifat sebagai berikut.

Sifat-sifat :

(1) ${}^{a^n}\log a^m = \dfrac{m}{n}$

(2) ${}^{p}\log ab = {}^{p}\log a + {}^{p}\log b$

(3) ${}^{p}\log \dfrac{a}{b} = {}^{p}\log a - {}^{p}\log b$

(4) ${}^{p}\log a^n = n \,.\, {}^{p}\log a$

(5) ${}^{a}\log b = \dfrac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a}$

Bukti 1

$${}^{a^n}\log a^m = \frac{m}{n} \Leftrightarrow (a^n)^{m/n} = a^m.$$

Artinya, jika kita bisa menunjukkan bahwa $(a^n)^{m/n} = a^m$ maka benarlah bahwa ${}^{a^n}\log a^m = \frac{m}{n}$.

Penyelidikan : $(a^n)^{m/n} = a^m$ ... berdasarkan teorema bilangan berpangkat.

Dengan demikian kebenaran rumus terbukti.

Bukti 2

$${}^{p}\log ab = {}^{p}\log a + {}^{p}\log b \Leftrightarrow p^{({}^{p}\log a + {}^{p}\log b)} = ab$$

Artinya, jika kita bisa menunjukkan bahwa $p^{({}^{p}\log a + {}^{p}\log b)} = ab$ maka kebenaran rumus terbukti.

Penyelidikan : $p^{({}^{p}\log a + {}^{p}\log b)} = (p^{{}^{p}\log a})(p^{{}^{p}\log b})$

$$= (a)\ (b) = ab.$$

Dengan demikian kebenaran rumus terbukti.

Bukti 3

$$ {}^{p}\log \frac{a}{b} = {}^{p}\log a - {}^{p}\log b \Leftrightarrow p^{({}^{p}\log a - {}^{p}\log b)} = \frac{a}{b} $$

Artinya, jika terbukti $p^{({}^{p}\log a - {}^{p}\log b)} = \frac{a}{b}$ maka kebenaran rumus terbukti.

Penyelidikan : $p^{({}^{p}\log a - {}^{p}\log b)} = \dfrac{p^{({}^{p}\log a)}}{p^{({}^{p}\log b)}} = \dfrac{a}{b}$.

Dengan demikian kebenaran rumus terbukti.

Bukti 4

$$ {}^{p}\log a^{n} = n \,.\, {}^{p}\log a. \Leftrightarrow p^{(n.\,{}^{p}\log a)} = a^{n} $$

Artinya, jika pernyataan $p^{(n.\,{}^{p}\log a)} = a^{n}$ benar, maka kebenaran rumus terbukti.

Penyelidikan : $p^{(n.\,{}^{p}\log a)} = p^{({}^{p}\log a)(n)}$

$= (p^{{}^{p}\log a})^{n}$.

$= (a)^{n}$.

Dengan demikian kebenaran rumus terbukti.

Bukti 5

$$ {}^{a}\log b = \frac{{}^{p}\log b}{{}^{p}\log a} \Leftrightarrow {}^{p}\log b = ({}^{p}\log a)\,({}^{a}\log b) $$

$$ \Leftrightarrow p^{({}^{p}\log a)({}^{a}\log b)} = b $$

Artinya, jika bisa ditunjukkan bahwa $({}^{p}\log a)({}^{a}\log b) = b$ maka kebenaran rumus terbukti.

Penyelidikan : $p^{({}^{p}\log a)({}^{a}\log b)} = p^{({}^{p}\log a)({}^{a}\log b)}$

$= [p^{({}^{p}\log a)}]^{({}^{a}\log b)}$

$= [a]^{({}^{a}\log b)} = b$

Dengan demikian kebenaran rumus terbukti.

Contoh soal :

Sederhanakan : $^{2}\log 10 - {}^{2}\log 5$.

Jawab : $^{2}\log 10 - {}^{2}\log 5$

$= {}^{2}\log (10 / 5)$

$= {}^{2}\log 2$

$= 1$

<u>**Cara menyelesaikan persamaan logaritma**</u> :

Untuk menyelesaikan persamaan atau pertidaksamaan dalam bentuk logaritma, perlu dicermati syarat-syarat bentuk persamaan.

$^{a}\log b = c$.

Syarat-syarat tersebut adalah :

(1) a sebagai bilangan pokok harus dipenuhi

$a > 0$ dan $a \neq 1$

(2) b sebagai bilangan yang ditarik logaritmanya harus dipenuhi

$b > 0$.

(3) Yang dimaksud dengan log log x dan $\log^2 x$ adalah

$\log \log x = \log (\log x)$

$\log^2 x = (\log x)(\log x)$

<u>Contoh</u> :

Tentukan penyelesaian dari

(i) $\log (x - 2) + \log (x - 1) = \log 6$

(ii) $\log (x - 2) + \log (x - 1) < \log 6$

<u>Jawab</u> :

(i) Syarat yang harus dipenuhi untuk bilangan yang ditarik logaritmanya adalah

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ \\ (2)\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x > 2}$$

(3) Melakukan penjabaran

$\log (x - 2) + \log (x - 1) = \log 6$

$\log (x-2)(x-1) = \log 6$

$(x-2)(x-1) = 6$

$x^2 - 3x + 2 = 6$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-4)(x+1) = 0$

$x = 4$ atau $x = -1$

Karena syarat yang harus dipenuhi dari (1) dan (2) adalah $x > 2$, maka penyelesaian sebenarnya hanyalah $\boxed{x = 4.}$

(ii) Seperti nomor sebelumnya, syarat yang harus dipenuhi adalah :

(1) Untuk bilangan yang ditarik logaritmanya diperoleh :

$$x > 2$$

(2) Penjabaran dari soal

$\log (x-2) + \log (x-1) < \log 6$

$\Leftrightarrow \log (x-2)(x-1) < \log 6$

$\Leftrightarrow \quad (x-2)(x-1) < 6$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 < 6$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x+1) < 0$

$\Leftrightarrow \quad -1 < x < 4$

Apabila disyaratkan berlaku untuk syarat (1) dan (2) maka penyelesaian selengkapnya adalah $2 < x < 4$.

Latihan 4

Sederhanakan :

1. ${}^{2}\log 5 \div {}^{2}\log 10 - {}^{2}\log 25$
2. ${}^{2}\log 15 + {}^{2}\log 14 - {}^{2}\log 105$
3. ${}^{3}\log 8 - {}^{3}\log 54 - {}^{3}\log 4$
4. ${}^{6}\log 5 + {}^{1/6}\log 10 - {}^{6}\log 108$
5. ${}^{2}\log V6 + \frac{1}{2}\, {}^{2}\log 3$

Tentukan penyelesaian dari :

6. $\log (2x-1) - \log (x-3) = \log 7$

7. $\log x + \log (x + 2) - 2 = \log 0{,}15$
8. $\log \log (x - 3) + \log 3 = \log \log (x^2 - 3x)$
9. $2 \log^2 x + \log x^3 - 9 = 0$
10. ${}^2\log^2 x + 2 \,.\, {}^2\log x^2 - {}^2\log 8 = 2$
11. $\log (x - 1) + \log (2x - 2) + \log^2 (x - 1) = \log 2$
12. ${}^4\log (4 - x^2) = {}^2\log (x^2 - 2)$
13. Bagaimanakah penyelesaiannya jika tanda yang digunakan untuk soal no.6 s.d. no.12 adalah pertidaksamaan yaitu ">" atau "<" atau "≥" atau "≤" ?.

BAGIAN V
POLA BILANGAN DAN BARISAN

A. POLA BILANGAN

1. Mencari pola

Perhatikan beberapa himpunan berikut :

1. Himpunan Bilangan Asli : $\{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
2. Himpunan Bilangan Cacah : $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
3. Himpunan Bilangan Bulat : $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
4. Himpunan Bilangan (Asli) Ganjil : $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
5. Himpunan Bilangan (Asli) Genap : $\{2, 4, 6,. 8, 10, \dots\}$

Dapat diamati bahwa anggota setiap himpunan di atas dapat diurutkan karena memiliki keteraturan atau pola. Anggota-anggota himpunan dapat disusun tidak berurutan. Namun untuk menyatakan masih banyaknya anggota lain yang dapat terbentuk berdasar pola yang ada, maka penyajian anggota suatu himpunan dengan cara mendaftar haruslah mengurutkan beberapa anggotanya agar polanya dapat terlihat dengan jelas. Dengan hanya memperhatikan anggotanya yang telah terurut dalam pola tersebut akan diperoleh pola bilangan berikut :

1) $1, 2, 3, 4, 5 \dots$
2) $0, 1, 2, 3, 4, \dots$
3) $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$
4) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
5) $2, 4, 6,. 8, 10, \dots$

Pada tiga himpunan pertama, pola atau keteraturannya adalah setiap suku diperoleh dari suku sebelumnya ditambah 1. Perbedaannya, hanya "suku awal"-nya saja yang berbeda. Pada dua himpunan terakhir aturan atau polanya ialah setiap suku diperoleh dengan menambah 2 pada suku di depannya. Karenanya, perbedaan pada suku awal akan memberikan perbedaan pada suku-suku berikutnya.

Pola-pola bilangan dapat dilihat pula pada kalender, pada bangun-bangun geometri atau pada tabel-tabel, seperti nampak pada beberapa contoh berikut:

Mei 2000

Minggu		7	14	21	28
Senin	1	8	15	22	29
Selasa	2	9	16	23	30
Rabu	3	10	17	24	31
Kamis	4	11	18	25	
Jumat	5	12	19	26	
Sabtu	6	13	20	27	

Pada kalender bulan Mei 2000 di atas dapat ditemukan beberapa pola, misalnya:

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

b. 1, 8, 15, 22, 29, ...

c. 1, 9, 17, 25, ...

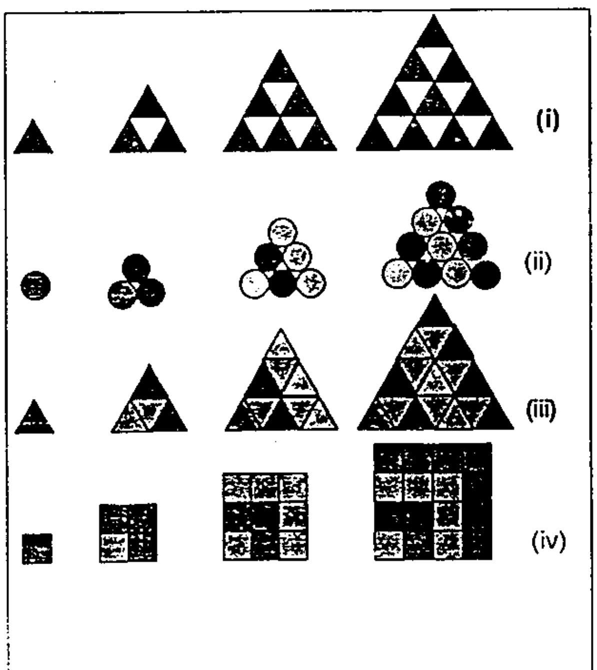
d. 3, 11, 19, 27, ...

e. 26, 18, 10, 2, ...

f. 27, 18, 9, 0, ...

g. 29, 24, 19, 14, ...

dan masih banyak lagi pola bilangan lainnya yang dapat dicari.



Pada pola bangun geometri di atas, banyaknya daerah pada bangun yang diarsir menunjukkan adanya keteraturan sehingga membentuk pola bilangan berikut :

(i) 1, 3, 6, 10, ... (hanya yang terarsir)

(ii) 1, 3, 6, 10, ...

(iii) 1, 4, 9, 16, ...

(iv) 1, 4, 9, 16, ...

Tabel di bawah ini memuat banyak macam pola bilangan seperti hainya pada kalender bulan Mei 2000 di atas. Jika diperhatikan lebih lanjut, tabel di bawah ini menunjukkan bahwa semua bilangan prima kecuali 2 dan 3 pasti merupakan bentuk khusus dari $6n \pm 1$, namun sebaliknya tidak berlaku. Artinya tidak setiap bentuk $6n \pm 1$ menyatakan bilangan prima.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108

2. Segitiga Pascal

	jumlah	
1 → 1 → 1 → 2 → 3 → 5	1	2^0
1 1	2	2^1
1 2 1	4	2^2
1 3 3 1	8	2^3
1 4 6 4 1	16	2^4
1 5 10 10 5 1	32	2^5
1 6 15 20 15 6 1	64	2^6
1 7 21 35 35 21 7 1	128	2^7
1 8 28 56 70 56 28 8 1	256	2^8

Tanda busur dengan garis putus-putus pada segitiga Pascal itu menunjukkan cara diperolehnya sebuah nilai dari dua nilai lainnya yang berada di kiri atas dan kanan atasnya. Segitiga Pascal beserta pengembangannya ini memuat sangat banyak pola. Di antaranya, yang terkait dengan barisan:

a. Bilangan Asli : 1, 2, 3, 4, 5, ...
b. Bilangan Segitiga : 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
c. Pangkat n dari bilangan 2 : 1, 2, 4, 8. 16, 32, ...
d. Bilangan Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Pola yang terdapat pada segitiga Pascal ini digunakan antara lain dalam :

a. menentukan koefisien-koefisien perpangkatan binom, misalnya $(a + b)^6$ dapat dijabarkan menjadi : $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ yang koefisien-koefisiennya berturut-turut dapat dilihat pada baris ke-7 segitiga Pascal tersebut.
b. menentukan banyaknya kombinasi k unsur berbeda dari n unsur.
c. membantu menentukan banyaknya anggota himpunan bagian dari sebuah himpunan beranggota sebanyak n buah

3. Beberapa macam bilangan poligonal dan polihedral

Berikut ini bilangan-bilangan yang telah terurut yang membentuk **barisan**:

a. Bilangan Segitiga : 1, 3, 6, 10, 15, ...

b. Bilangan Persegi : 1, 4, 9, 16, 25, ...

c. Bilangan Persegipanjang : 1 x 2, 2 x 3, 3 x 4, 4 x 5, 5 x 6, ... atau
2, 6, 12, 20, 30, ...

d. Bilangan Kubik : 1, 8, 27, 64, 125, ...

e. Bilangan Balok : 1 x 2 x 3, 2 x 3 x 4, 3 x 4 x 5, 4 x 5 x 6, ... atau
6, 24, 60, 120, ...

f. Bilangan piramid : 1, 4, 10, 20, 35, ...

4. Pola operasi khusus

Ada beberapa pola pasangan bilangan yang hasil operasinya sama terhadap dua macam operasi hitung. Contoh:

a. Perkalian dan penjumlahan

$3 \times 1\tfrac{1}{2} = 3 + 1\tfrac{1}{2}$

$4 \times 1\frac{1}{3} = 4 + 1\frac{1}{3}$

$5 \times 1\tfrac{1}{4} = 5 + 1\tfrac{1}{4}$

$$n \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{n^2}{n-1} = \frac{n^2 - n + n}{n-1} = \frac{n^2 - n}{n-1} + \frac{n}{n-1}$$
$$= \frac{n(n-1)}{n-1} + \frac{n}{n-1} = n + \frac{n}{n-1} \text{ asal n bukan1}$$

b. Perkalian dan Pengurangan

$1 \times \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2}$

$2 \times \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3}$

$3 \times \frac{3}{4} = 2 - \frac{3}{4}$

$$n . \frac{n}{n+1} = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2 + n - n}{n+1} = \frac{n^2 + n}{n+1} - \frac{n}{n+1}$$
$$= \frac{n(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1} = n - \frac{n}{n+1} \text{ asal n bukan -1}$$

c. Pembagian dan Penjumlahan

$1\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

$2\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$3\frac{1}{5} : \frac{4}{5} = 3\frac{1}{5} + \frac{4}{5}$

$$\frac{n^2}{n+1} : \frac{n}{n+1} = n = \frac{n(n+1)}{n+1} = = \frac{n^2 + n}{n+1}$$
$$= \frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}, \text{ asal n bukan - 1}$$

d. Pembagian dan Pengurangan

$6\frac{1}{4} : 5 = 6\frac{1}{4} - 5$

$5\frac{1}{3} : 4 = 5\frac{1}{3} - 4$

$4\frac{1}{2} : 3 = 4\frac{1}{2} - 3$

$$\frac{n^2}{(n-1)} : n = \frac{n}{(n-1)} = \frac{n^2 - n^2 + n^2}{(n-1)} =$$

$$= \frac{n^2}{n-1} - \frac{n(n-1)}{n-1} = \frac{n^2}{n-1} - n \text{ asal } n \text{ bukan } 1$$

B. BARISAN BILANGAN

1. Pengertian barisan bilangan

Pada bagian sebelumnya telah ditunjukkan beberapa contoh barisan bilangan. Pada bagian ini akan dibahas tentang pengertian dan cara menentukan suku ke-n suatu barisan bilangan. Barisan merupakan fungsi dari bilangan asli. Untuk setiap bilangan asli dapat ditentukan nilai suatu fungsi yang rumusnya ditentukan. Rumus atau *aturan* itu menentukan jenis barisannya. Setiap titik hasil pemetaan pada fungsi itu dinamakan *suku* barisan tersebut. Peta dari bilangan asli n dinamakan suku ke-n, yang dalam barisan itu menempati urutan ke-n. Contohnya, barisan bilangan genap 2, 4, 6, 8, ... dengan rumus suku ke-n adalah $U_n = 2n$. Suku pertama sering dilambangkan dengan **a**. Jika dalam suatu barisan ditentukan banyak sukunya berhingga maka barisan itu dinamakan barisan berhingga.

Pada Pasal A telah diberikan beberapa contoh bilangan-bilangan terurut yang membentuk barisan. Untuk membentuk suku-sukunya perlu diikuti aturan pembentuk sukunya. Aturan itu dapat dinyatakan dalam bentuk rumus pemetaannya.

Contoh:

No.	Barisan	suku ke-n	Keterangan
1	1, 2, 3, 4, 5, 6, ...	n	Barisan Bilangan Asli
2	1, 3, 5, 7, 9, ...	2n - 1	Barisan bilangan (asli) ganjil
3	2, 4, 6, 8, 10, ...	2n	Barisan bilangan (asli) genap
4	1, 3, 6, 10, 15.	½ n(n + 1)	Barisan bilangan Segitiga
5	2, 6, 12, 20, 30, ...	n(n + 1)	Barisan Bilangan Persegipanjang
6	1, 4, 9, 16, 25, ...	(n^2)	Barisan bilangan Persegi

7	1, 8, 27, 64, 125, ...	n^3	Barisan Bilangan Kubik
8	6, 24, 60, 120, 210, ...	$n(n-1)(n+2)$	Barisan Bilangan Balok
9	1, 2, 4, 8, 16, 32, ...	2^{n-1}	Barisan geometri
10	$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \ldots$	$\frac{1}{3n-1}$	Barisan harmonik (suku-sukunya kebalikan suku barisan aritmetika)

Untuk menentukan rumus suku ke-n suatu barisan bilangan, dapat juga dengan mengidentifikasi selisih antara masing-masing suku yang berurutan. Apabila dalam satu tingkat (level) pencarian selisih suku-suku yang berurutan tersebut belum diperoleh selisih yang tetap maka pengerjaan diteruskan ke tingkat-tingkat berikutnya hingga diperoleh suatu selisih tetap. Suatu barisan dikatakan berbentuk linier (berderajat satu) apabila selisih tetapnya dicapai pada 1 tingkat pengerjaan, dikatakan berderajat dua (kuadrat) apabila selisih tetapnya dicapai pada pada 2 tingkat pengerjaan, dikatakan berderajat tiga apabila selisih tetapnya dicapai pada 3 tingkat pengerjaan, demikian seterusnya. Uraian selengkapnya adalah sebagai berikut :

Selisih tetap 1 level U_n linier bentuk umumnya $U_n = an + b$

Selisih tetap 2 level U_n kuadrat bentuk umumnya $U_n = an^2 + bn + c$

Selisih tetap 3 level U_n berderajat tiga bentuk umumnya $U_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

Berikut adalah beberapa contoh barisan bilangan berderajat 1 dan 2.

1) 4, 6, 8, 10, 12, ... (barisan berderajat 1, selisih tetap dicapai hingga 1 tingkat)

2 2 2 2

2) 3, 8, 15, 24, 35, ... (barisan berderajat 2, selisih tetap dicapai hingga 2 tingkat)

5 7 9 11

2 2 2

2. Menentukan Rumus Suku Ke-n

Jika u_n merupakan lambang dari suku ke-n suatu barisan bilangan, bentuk umum dari u_n adalah

$$u_n = an + b, \text{ dengan } a \text{ dan } b \in R \text{ dan } a \neq 0 \ldots \text{ (barisan berderajat 1)}$$

$u_n = an^2 + bn + c$, dengan $a,b,c \in R$ dan $a \neq 0$ ... (barisan berderajat 2)

$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d$, dengan $a,b,cd \in R$ dan $a \neq 0$ ... (barisan berderajat 3).

Bagaimana secara tepat menentukan rumus umum suku ke-n dari suatu barisan bilangan, berikut adalah uraian selengkapnya.

1. Barisan Berderajat Satu.

Jika $u_n = an + b$, maka

$u_1 = a(1) + b = a + b$

$u_2 = a(2) + b = 2a + b$

$u_3 = a(3) + b = 3a + b$

$u_4 = a(4) + b = 4a + b$

$u_5 = a(5) + b = 5a + b$, sehingga secara umum

$$\begin{array}{ccccccccccc} u_1 & , & u_2 & , & u_3 & , & u_4 & , & u_5 & & u_n \\ \boxed{a+b} & , & 2a+b & , & 3a+b & , & 4a+b & , & 5a+b & , \ldots & u_n \\ & \boxed{a} & & a & & a & & a & & & \end{array}$$

Bandingkan dengan soal no.1, lihat korespondensinya

$$\begin{array}{ccccccccc} \boxed{4} & , & 6 & , & 8 & , & 10 & , & 12, \ldots \\ & \boxed{2} & & 2 & & 2 & & 2 & \end{array}$$

Maka : (i) $a = 2 \Rightarrow$ (ii) $a + b = 4$

$2 + b = 4 \rightarrow b = 2$

Sehingga rumus suku ke-n yang dimaksud adalah $u_n = 2n + 2$.

2. Barisan Berderajat Dua.

Untuk barisan berderajat dua, jika $u_n = an^2 + bn + c$, maka

$u_1 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$

$u_2 = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$

$u_3 = a\,(3)^2 + b\,(3) + c = 9a + 3b + c$

$u_4 = a\,(4)^2 + b\,(4) + c = 16a + 4b + c$

$u_5 = a\,(5)^2 + b\,(5) + c = 25a + 5b + c$, sehingga diperoleh

$$\boxed{a + b + c},\ 4a + 2b + c,\ 9a + 3b + c,\ 16a + 4b + c,\ 25a + 5b + c,\ \ldots$$

$$\boxed{3a + b} \qquad 5a + b \qquad 7a + b \qquad 9a + b$$

$$\boxed{2a} \qquad 2a \qquad 2a$$

Bandingkan dengan soal no.3, dan selidiki korespondensinya

$$\boxed{3},\ 8\ ,\ 15\ ,\ 24\ ,\ 35$$

$$\boxed{5} \quad 7 \quad 9 \quad 11$$

$$\boxed{2} \quad 2 \quad 2$$

Maka dari tinjauan korespondensinya bila diurut dari bagian terbawah dengan urutan naik akan diperoleh sebagai berikut :

(i) $2a = 2$

$a = 1 \Rightarrow$ *(ii)* $3a + b = 5$

$3(1) + b = 5$

$b = 2 \Rightarrow$ *(iii)* $a + b + c = 3$

$1 + 2 + c = 3$

$c = 0$

Dengan demikian maka $u_n = an^2 + bn + c = n^2 + 2n + 0 = n(n + 2)$ adalah rumus umum suku ke-n yang dimaksudkan.

LATIHAN **5**

1). Tentukan rumus suku ke-n untuk masing-masing barisan bilangan berikut ini :

a. 5, 9, 13, 17, … (Kunci : $U_n = 4n + 1$)

b. 6, 11, 16, 21, … (Kunci : $U_n = 5n + 1$)

c. 1, 6, 13, 22, … (Kunci : $U_n = n^2 + 2n - 2$)

d. 2, 5, 13, 24, … (Kunci : $U_n = 2n^2 - 3n + 3$)

e. 1, 9, 27, 61, 117, ... (Kunci : $U_n = n^3 - n^2 + 4n - 3$)

f. 2, 10, 28, 68, 142, ... (Kunci : $U_n = 2n^3 - 7n^2 + 15n - 8$)

Soal e dan f adalah barisan berderajat tiga.

2) Perhatikan pola bilangan :

3 x 37 = 111

33 x 37 = 1221

333 x 37 = 12321

3333 x 37 = ...

Buatlah dugaan untuk perkalian :

a. 333333 x 37

b. 3333333 x 37

3) Perhatikan pola bilangan :

(1 x 8) + 1 = 9

(12 x 8) + 2 = 98

(123 x 8) + 3 = 987

(1234 x 8) + 4 = 9876

Buatlah dugaan untuk perhitungan berikut :

a. (12345 x 8) + 5 = ...

b. (123456 x 8) +6 = ...

c. (123456789 x 8) + 9 = ...

Periksalah dugaan anda dengan menggunakan kalkulator.

4) Perhatikan pola bilangan :

9999 x 2 = 19998

9999 x 3 = 29997

9999 x 4 = 39996

9999 x 5 = ...

9999 x 6 = ...

9999 x 7 = ...

9999 x 8 = ...

9999 x 9 = ...

Periksalah dugaan anda dengan menggunakan kalkulator.